ÜBER

DIE MALFATTI'SCHE AUFGABE

UND DEREN

CONSTRUCTION UND VERALLGEMEINERUNG VON STEINER.



VON

F. MERTENS.

(Mit 1 Tafel.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 14. OCTOBER 1875.

Plücker hat im XI. Bande [1] des Crelle'schen Journals eine Construction derjenigen von Steiner [2] herrührenden Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe, wo an die Stelle dreier gegebener Geraden drei beliebige Kreise gesetzt werden, gegeben, welche wesentlich von der Steiner'schen Construction [3] der nämlichen Aufgabe abweicht. Dieser Umstand veranlasste mich zu einer analytischen Behandlung der Malfatti'schen Aufgabe für das ebene Dreieck und drei in einer Ebene liegende Kreise mit besonderer Berücksichtigung der Steiner'schen Lösungen derselben. Selbstverständlich bedarf das im Folgenden befolgte Verfahren nur leichter Änderungen, um unmittelbar auf die Kugel anwendbar zu sein.

In Betreff der einschlägigen Literatur verweise ich auf die von Herrn Schroeter im LXXVII. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals [4] gegebene Übersicht.

1.

Die Malfatti'sche Aufgabe für das ebene Dreieck lautet:

In ein gegebenes Dreieck ABC drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks und die beiden anderen Kreise berührt.

Bezeichnen

$$L = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$M = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$
$$N = A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

---

[1] Analytisch-geometrische Aphorismen, Nr. VI.

[2] Einige geometrische Betrachtungen von H. Steiner, Nr. 15, im 1. Bande des Crelle'schen Journals.

[3] Ebendaselbst.

[4] Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe, von H. Schroeter.

unter der Voraussetzung, dass

$$A_1^2+B_1^2=A_2^2+B_2^2=A_3^2+B_3^2=1$$

ist, die Gleichungen der Seiten BC, CA, AB des gegebenen Dreiecks und

$$\mathfrak{K}_1=(x-u_1)^2+(y-v_1)^2-r_1^2=0$$
$$\mathfrak{K}_2=(x-u_2)^2+(y-v_2)^2-r_2^2=0$$
$$\mathfrak{K}_3=(x-u_3)^2+(y-v_3)^2-r_3^2=0$$

die Gleichungen der gesuchten drei Kreise, welche bezüglich die Seiten M und N, N und L, L und M berühren, so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Aufgabe, wenn man von den Auflösungen absieht, wo zwei Kreise eine Dreiecksseite in einem und demselben Punkte berühren, durch die neun Gleichungen

$$\begin{aligned} M(u_1, v_1) &= r_1 \\ N(u_1, v_1) &= r_1 \\ N(u_2, v_2) &= r_2 \\ L(u_2, v_2) &= r_2 \\ L(u_3, v_3) &= r_3 \\ M(u_3, v_3) &= r_3 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2 &= (r_2+r_3)^2 \\ (u_3-u_1)^2+(v_3-v_1)^2 &= (r_3+r_1)^2 \\ (u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2 &= (r_1+r_2)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

ausgedrückt.

Zur Auflösung dieser Gleichungen gelangt man am einfachsten, indem man die Functionen L, M, N durch die Unbekannten der Aufgabe ausdrückt.

Aus den Gleichungen

$$L(u_2, v_2)=A_1u_2+B_1v_2+C_1=r_2$$
$$L(u_3, v_3)=A_1u_3+B_1v_3+C_1=r_3$$
$$(u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2=(r_2+r_3)^2$$

folgt

$$A_1(u_2-u_3)+B_1(v_2-v_3)=r_2-r_3 \tag{3}$$

und, wenn

$$A_1(v_2-v_3)-B_1(u_2-u_3)=D_1 \tag{4}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} (r_2+r_3)^2A_1 &= (r_2-r_3)(u_2-u_3)+D_1(v_2-v_3) \\ (r_2+r_3)^2B_1 &= (r_2-r_3)(v_2-v_3)-D_1(u_2-u_3) \end{aligned} \tag{5}$$

$$(r_2+r_3)^2(A_1x+B_1y+C_1)=-\frac{1}{2}(r_2-r_3)(\mathfrak{K}_2-\mathfrak{K}_3)+D_1\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & u_2 & v_2\\ 1 & u_3 & v_3\end{vmatrix}+C;$$

der Factor von D_1 stellt nach der üblichen Bezeichnung die Determinante

$$u_2v_3-u_3v_2+x(v_2-v_3)+y(u_3-u_2)$$

vor. Die Constante C findet man, indem man in der vorstehenden Identität

$$x=u_2 \qquad y=v_2$$

setzt,

$$= 2r_2 r_3 (r_2 + r_3)$$

und für D_1 ergibt sich durch Bildung der Summe der Quadrate der Gleichungen 3) und 4) die Gleichung

$$D_1^2 = 4r_2 r_3. \tag{6}$$

Es ist also

$$(r_2+r_3)^2 L = -\frac{1}{2}(r_2-r_3)(\mathfrak{K}_2-\mathfrak{K}_3) + D_1 \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} + 2r_2 r_3 (r_2+r_3). \tag{7}$$

Ebenso findet man, wenn zur Abkürzung

$$A_2(v_3-v_1) - B_2(u_3-u_1) = D_2$$

$$A_3(v_1-v_2) - B_3(u_1-u_2) = D_3$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} (r_3+r_1)^2 A_2 &= (r_3-r_1)(u_3-u_1) + D_2(v_3-v_1) \\ (r_3+r_1)^2 B_2 &= (r_3-r_1)(v_3-v_1) - D_2(u_3-u_1) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$(r_3+r_1)^2 M = -\frac{1}{2}(r_3-r_1)(\mathfrak{K}_3-\mathfrak{K}_1) + D_2 \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & u_3 & v_3 \\ 1 & u_1 & v_1 \end{vmatrix} + 2r_3 r_1 (r_3+r_1) \tag{9}$$

$$D_2^2 = 4r_3 r_1 \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} (r_1+r_2)^2 A_3 &= (r_1-r_2)(u_1-u_2) + D_3(v_1-v_2) \\ (r_1+r_2)^2 B_3 &= (r_1-r_2)(v_1-v_2) - D_3(u_1-u_2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$(r_1+r_2)^2 N = -\frac{1}{2}(r_1-r_2)(\mathfrak{K}_1-\mathfrak{K}_2) + D_3 \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} + 2r_1 r_2 (r_1+r_2) \tag{12}$$

$$D_3^2 = 4r_1 r_2. \tag{13}$$

Setzt man in der Identität 7)

$$x = u_1 \qquad y = v_1,$$

so wird mit Hilfe der Gleichungen 2)

$$(r_2+r_3)^2 L(u_1, v_1) = -r_1(r_2-r_3)^2 + D_1\Delta + 2r_2 r_3 (r_2+r_3)$$

$$(r_2+r_3)^2 [r_1 + L(u_1, v_1)] = 2r_2 r_3 (r_1+r_2+r_3) + 2r_1 r_2 r_3 + D_1 \Delta,$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_3 v_1 - u_1 v_3 + u_1 v_2 - u_2 v_1 \tag{14}$$

ist, und da, wie leicht aus den Gleichungen 2) oder auch aus der Bemerkung, dass Δ den doppelten Flächeninhalt des von den Mittelpunkten der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ gebildeten Dreiecks ausdrückt, folgt,

$$\Delta^2 = 4r_1 r_2 r_3 (r_1+r_2+r_3) \tag{15}$$

ist, so ergibt sich

$$r_1 + L(u_1, v_1) = \frac{1}{2r_1}\left(\frac{\Delta + r_1 D_1}{r_2+r_3}\right). \tag{16}$$

Ebenso folgt aus den Identitäten 9), 12)

$$r_2+M(u_2, v_2)=\frac{1}{2r_2}\left(\frac{\Delta+r_2 D_2}{r_3+r_1}\right)^2 \tag{17}$$

$$r_3+N(u_3, v_3)=\frac{1}{2r_3}\left(\frac{\Delta+r_3 D_3}{r_1+r_2}\right)^2 \tag{18}$$

Man bilde ferner mittelst der Formeln 5), 8), 11) die Ausdrücke

$$\mathfrak{A}=A_2 A_3+B_2 B_3$$

$$\mathfrak{B}=A_3 A_1+B_3 B_1$$

$$\mathfrak{C}=A_1 A_2+B_1 B_2.$$

Es wird

$$(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2\mathfrak{A}=[(r_1-r_2)(r_1-r_3)-D_2 D_3][(u_2-u_1)(u_3-u_1)+(v_2-v_1)(v_3-v_1)]$$
$$-(r_1-r_2)D_2\Delta-(r_1-r_3)D_3\Delta,$$

oder, da den Gleichungen 2) zufolge

$$(u_2-u_1)(u_3-u_1)+(v_2-v_1)(v_3-v_1)=\frac{1}{2}[(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2+(u_3-u_1)^2+(v_3-v_1)^2]$$
$$-\frac{1}{2}[(u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2]$$
$$=\frac{1}{2}[(r_1+r_2)^2+(r_1+r_3)^2-(r_2+r_3)^2]$$
$$=r_1(r_1+r_2+r_3)-r_2 r_3 \tag{19}$$

ist,

$$(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2\mathfrak{A}=[(r_1-r_2)(r_1-r_3)-D_2 D_3][r_1(r_1+r_2+r_3)-r_2 r_3]$$
$$-(r_1-r_2)D_2\Delta-(r_1-r_3)D_3\Delta.$$

In diesem Ausdrucke erkennt man sofort den Cosinus eines dreitheiligen Winkels, wenn man

$$\frac{r_1(r_1+r_2+r_3)-r_2 r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}=\cos\varphi \qquad \frac{\Delta}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}=\sin\varphi$$

$$\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}=\cos\psi \qquad \frac{D_3}{r_1+r_2}=\sin\psi$$

$$\frac{r_1-r_3}{r_1+r_3}=\cos\chi \qquad \frac{D_2}{r_1+r_3}=\sin\chi$$

setzt, was den Gleichungen 15), 13), 10) zufolge gestattet ist.

Es wird nämlich

$$\mathfrak{A}=\cos(\varphi+\psi+\chi),$$

und demgemäss

$$\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{2}}=\sin\frac{\varphi+\psi+\chi}{2}.$$

Da nun bei gehöriger Zeichenbestimmung der Wurzeln

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_1+r_2+r_3}}{\sqrt{r_1+r_2}\sqrt{r_1+r_3}} \qquad \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1+r_2}\sqrt{r_1+r_3}}$$

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1+r_2}} \qquad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1+r_2}}$$

$$\cos\frac{\chi}{2} = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1+r_3}} \qquad \sin\frac{\chi}{2} = \frac{\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1+r_3}}$$

wird, so erhält man durch Entwicklung von $\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi+\chi)$

$$\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{2}} = \frac{r_1\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1}\sqrt{r_1+r_2+r_3}(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})-r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

$$1+\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{2}} = r_1\left(\frac{\sqrt{r_1+r_2+r_3}+\sqrt{r_2}}{r_1+r_3}\right)\left(\frac{\sqrt{r_1+r_2+r_3}+\sqrt{r_3}}{r_1+r_2}\right)$$

$$=\frac{1}{r_2r_3}\left(\frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3}+r_2\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}}{r_1+r_3}\right)\left(\frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3}+r_3\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}{r_1+r_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4r_2r_3}\left(\frac{\Delta+r_2D_2}{r_3+r_1}\right)\left(\frac{\Delta+r_3D_3}{r_1+r_2}\right), \tag{20}$$

welche Gleichung auch unmittelbar, ohne durch die trigonometrischen Formeln hindurch zu gehen, erhärtet werden kann. Über das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{2}}$ wird nichts festgesetzt.

Durch Buchstabenverwandlung ergibt sich

$$1+\sqrt{\frac{1-\mathfrak{B}}{2}} = \frac{1}{4r_3r_1}\left(\frac{\Delta+r_3D_3}{r_1+r_2}\right)\left(\frac{\Delta+r_1D_1}{r_2+r_3}\right) \tag{21}$$

$$1+\sqrt{\frac{1-\mathfrak{C}}{2}} = \frac{1}{4r_1r_2}\left(\frac{\Delta+r_1D_1}{r_2+r_3}\right)\left(\frac{\Delta+r_2D_2}{r_3+r_1}\right). \tag{22}$$

Der Fall, dass die Gleichungen 16), 17), 18), 20), 21), 22) durch das Verschwinden einer der Grössen

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_2+r_3,\ r_3+r_1,\ r_1+r_2$$

ihren Sinn verlieren würden, kann im Allgemeinen auch bei rein algebraischer Auffassung der Gleichungen 1), 2) nicht eintreten, weil im Gegenfalle diese letzteren nur acht Unbekannte enthalten würden.

2.

Setzt man

$$\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{2}}=\alpha \qquad \sqrt{\frac{1-\mathfrak{B}}{2}}=\beta \qquad \sqrt{\frac{1-\mathfrak{C}}{2}}=\gamma$$

$$\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\alpha' \quad \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}=\beta' \quad \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}=\gamma', \tag{23}$$

so ist in Folge der bekannten trigonometrischen Beziehung

$$1-\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2-\mathfrak{C}^2+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}=0,$$

welche übrigens nur eine Entwicklung (durch zeilenweise Ausführung des Determinantenquadrates) der Identität

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & 0 \\ A_2, & B_2, & 0 \\ A_3, & B_3, & 0 \end{vmatrix}^2 = 0$$

ist,

$$2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4=4\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

$$\alpha^2+\alpha'^2=1 \qquad \beta^2+\beta'^2=1 \qquad \gamma^2+\gamma'^2=1$$

$$\beta\gamma'+\gamma\beta'=\alpha \qquad \beta\gamma-\beta'\gamma'=\alpha'$$

$$\gamma\alpha'+\alpha\gamma'=\beta \qquad \gamma\alpha-\gamma'\alpha'=\beta'$$

$$\alpha\beta'+\beta\alpha'=\gamma \qquad \alpha\beta-\alpha'\beta'=\gamma'.$$

Dies vorausgeschickt, erhält man durch Beseitigung der Ausdrücke

$$\frac{\Delta+r_1 D_1}{r_2+r_3}, \quad \frac{\Delta+r_2 D_2}{r_3+r_1}, \quad \frac{\Delta+r_3 D_3}{r_1+r_2}$$

aus den Formeln 16), 17), 18), 20), 21), 22) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} L(u_1, v_1) &= -r_1+2r_1\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{(1+\alpha)} \\ M(u_2, v_2) &= -r_2+2r_2\frac{(1+\gamma)(1+\alpha)}{(1+\beta)} \\ N(u_3, v_3) &= -r_3+2r_3\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{(1+\gamma)}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

welche zu den Gleichungen 1) hinzugenommen eine Bestimmung der neun Unbekannten der Aufgabe mit Umgehung der Gleichungen zweiten Grades 2) ermöglichen.

Es genügt, unter den auf diese Weise erhaltenen neun Gleichungen diejenigen drei

$$L(u_1, v_1)-r_1=2r_1\left[\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{(1+\alpha)}-1\right] \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} M(u_1, v_1)-r_1 &= 0 \\ N(u_1, v_1)-r_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

zu behandeln, welche die Unbekannten u_1, v_1, r_1 enthalten; die Bestimmungsstücke der Kreise $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ erhält man dann auf Grund ähnlich gebauter Gleichungssysteme durch blosse Buchstabenverwandlung.

Den Gleichungen 26) genügt man, wenn f, g, h die Mittelpunktscoordinaten und den Halbmesser des in das Dreieck ABC nach Massgabe der Gleichungen

$$L(f, g)=M(f, g)=N(f, g)=h$$

eingeschriebenen Kreises bezeichnen, durch die Werthe

$$u_1=f+(r_1-h)\left(\frac{A_2+A_3}{2\alpha'^2}\right) \qquad v_1=g+(r_1-h)\left(\frac{B_2+B_3}{2\alpha'^2}\right),$$

und erhält durch Einsetzung derselben in die Gleichung 25)

$$(h-r_1)\left[1-\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{2\alpha'^2}\right]=2r_1\left[\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1+\alpha}-1\right].$$

Da aber nach 23)

$$1-\left(\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{2\alpha'^2}\right)=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\alpha'^2}=\frac{2\beta\gamma}{\alpha'}$$

$$\beta\gamma=\alpha'+\beta'\gamma'$$

ist, so wird einfacher

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha'}(h-r_1)=r_1\left[\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{(1+\alpha)}-1\right]$$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha'}h=r_1\left[\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{(1+\alpha)}+\frac{\beta'\gamma'}{\alpha'}\right]$$

$$r_1=h\,\frac{\alpha'\beta\gamma}{\lambda},$$

wo

$$\lambda=\alpha'\beta'\gamma'+(1-\alpha)(1+\beta)(1+\gamma).$$

Ebenso wird

$$u_2=f+(r_2-h)\left(\frac{A_3+A_1}{2\beta'^2}\right)\qquad v_2=g+(r_2-h)\left(\frac{B_3+B_1}{2\beta'^2}\right)\tag{27}$$

$$r_2=h\,\frac{\beta'\gamma\alpha}{\mu}\qquad \mu=\alpha'\beta'\gamma'+(1+\alpha)(1-\beta)(1+\gamma)\tag{28}$$

$$u_3=f+(r_3-h)\left(\frac{A_1+A_2}{2\gamma'^2}\right)\qquad v_3=g+(r_3-h)\left(\frac{B_1+B_2}{2\gamma'^2}\right)\tag{29}$$

$$r_3=h\,\frac{\gamma'\alpha\beta}{\nu}\qquad \nu=\alpha'\beta'\gamma'+(1+\alpha)(1+\beta)(1-\gamma)\tag{30}$$

gefunden.

Zur Vereinfachung der für r_1, r_2, r_3 erhaltenen Ausdrücke gelangt man durch Bildung der Producte $\mu\nu$, $\nu\lambda$, $\lambda\mu$. Es ist

$$\begin{aligned}\mu\nu&=\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+(1+\alpha)^2(1-\beta^2)(1-\gamma^2)+2(1+\alpha)(1-\beta\gamma)\alpha'\beta'\gamma'\\&=\beta'^2\gamma'^2[\alpha'^2+(1+\alpha)^2]+2\alpha'\beta'\gamma'(1+\alpha)(1-\beta\gamma)\\&=2\beta'\gamma'(1+\alpha)[\beta'\gamma'+\alpha'(1-\beta\gamma)],\end{aligned}$$

oder wegen

$$\alpha'+\beta'\gamma'=\beta\gamma,$$

$$\mu\nu=2\beta\gamma\beta'\gamma'(1+\alpha)(1-\alpha'),\tag{31}$$

und durch Buchstabenverwandlung

$$\nu\lambda=2\gamma\alpha\gamma'\alpha'(1+\beta)(1-\beta')$$

$$\lambda\mu=2\alpha\beta\alpha'\beta'(1+\gamma)(1-\gamma').$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}r_2r_3&=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1+\alpha'}{1+\alpha}\right)\\r_3r_1&=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1+\beta'}{1+\beta}\right)\\r_1r_2&=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1+\gamma'}{1+\gamma}\right)\end{aligned}\tag{32}$$

und mit Hilfe dieser Producte wird

$$r_1^2=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha'}\right)\left(\frac{1+\beta'}{1+\beta}\right)\left(\frac{1+\gamma'}{1+\gamma}\right)$$

$$r_2^2=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1+\alpha'}{1+\alpha}\right)\left(\frac{1+\beta}{1+\beta'}\right)\left(\frac{1+\gamma'}{1+\gamma}\right)$$

$$r_3^2=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1+\alpha'}{1+\alpha}\right)\left(\frac{1+\beta'}{1+\beta}\right)\left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma'}\right)$$

gefunden.

Es ist nun noch der Nachweis zu führen, dass man befugt ist, die Gleichungen 2) durch die Gleichungen 24) zu ersetzen, d. h. dass die Gleichungen 2) eine Folge der Gleichungen 1) und 24) sind, oder dass die gefundenen Kreise sich in der That und zwar, weil nach 32) die Halbmesser r_1, r_2, r_3 dasselbe Zeichen haben, von aussen berühren.

Bildet man aus den durch die Gleichungen 27), 29) gegebenen Werthen von u_2, v_2, u_3, v_3 den Ausdruck

$$\nabla = (u_2 - u_3)^2 + (v_2 - v_3)^2 - (r_2 + r_3)^2,$$

so wird

$$\nabla = \frac{(h-r_2)^2}{\beta'^2} + \frac{(h-r_3)^2}{\gamma'^2} - 2(h-r_2)(h-r_3)\left(\frac{1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{4\beta'^2\gamma'^2}\right) - (r_2+r_3)^2,$$

oder, weil nach 23)

$$\frac{1}{\beta'^2} = 1 + \frac{\beta^2}{\beta'^2} \qquad \frac{1}{\gamma'^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma'^2}$$

$$\frac{1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{4\beta'^2\gamma'^2} = 1 - \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

ist, einfacher

$$\nabla = \left[\frac{\beta}{\beta'}(h-r_2) + \frac{\gamma}{\gamma'}(h-r_3)\right]^2 - 4r_2 r_3.$$

Es ist ferner nach 23)

$$\frac{\beta h}{\beta'} + \frac{\gamma h}{\gamma'} = h\left(\frac{\beta\gamma' + \gamma\beta'}{\beta'\gamma'}\right) = \frac{h\alpha}{\beta'\gamma'},$$

und nach 28), 30), 31)

$$\frac{\beta r_2}{\beta'} + \frac{\gamma r_3}{\gamma'} = h\alpha\beta\gamma\left(\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right)$$

$$= \frac{h\alpha}{\beta'\gamma'}\,\frac{\alpha'\beta'\gamma' + (1+\alpha)(1-\beta\gamma)}{(1+\alpha)(1-\alpha')},$$

so dass

$$\frac{\beta}{\beta'}(h-r_2) + \frac{\gamma}{\gamma'}(h-r_3) = \frac{h\alpha}{\beta'\gamma'}\,\frac{(1+\alpha)(\beta\gamma-\alpha') - \alpha'\beta'\gamma'}{(1+\alpha)(1-\alpha')}$$

$$= h\,\frac{\alpha(1+\alpha-\alpha')}{(1+\alpha)(1-\alpha')}$$

$$\left[\frac{\beta}{\beta'}(h-r_2) + \frac{\gamma}{\gamma'}(h-r_3)\right]^2 = 2h^2\,\frac{1+\alpha'}{1+\alpha},$$

und in der That also nach 32)

$$\nabla = 0$$

wird. Auf dieselbe Weise werden alle Gleichungen 2) bewiesen.

Da die Ausdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vier verschiedene Werthsysteme annehmen können, je nachdem man nämlich festsetzt, dass im Innern des Dreiecks ABC entweder alle drei Functionen L, M, N positive Werthe oder irgend zwei derselben positive, die dritte hingegen negative Werthe besitzen sollen (die übrigen vier möglichen Fälle geben nichts Neues), und da für jedes dieser vier Werthsysteme über die Vorzeichen der Quadratwurzeln α, β, γ (23) acht verschiedene Bestimmungen getroffen werden können, so lassen die Gleichungen 1), 2) 32 verschiedene Auflösungen zu. Jedem der vier Werthsysteme von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ entspricht der Halbmesser h eines bestimmten der vier in das Dreieck $A\,B\,C$ einbeschreibbaren Kreise.

3.

Es seien

$$\mathfrak{K}_1 = 0 \qquad \mathfrak{K}_2 = 0 \qquad \mathfrak{K}_3 = 0$$

die Gleichungen dreier den Gleichungen 1), 2) genügenden Kreise,

$$\mathfrak{K} = (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung des Kreises, welcher dieselben senkrecht schneidet oder durch deren Berührungspunkte geht, so dass

$$\mathfrak{K}_1(u, v) = \mathfrak{K}_2(u, v) = \mathfrak{K}_3(u, v) = r^2 \qquad 33)$$

ist, und $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ der Halbmesser und die Mittelpunktscoordinaten eines Kreises $\mathfrak{H}_1$, welcher die Geraden

$$L = 0 \qquad \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2 = 0 \qquad \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_3 = 0$$

nach Massgabe der Gleichungen

$$\begin{aligned} & L(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{h}_1 \\ & \mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - \mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = 2\mathfrak{h}_1(r_1 + r_2) \\ & \mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - \mathfrak{K}_3(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = 2\mathfrak{h}_1(r_1 + r_3) \end{aligned} \qquad 34)$$

berührt. Da den zwei letzten dieser Gleichungen durch die Werthe

$$\mathfrak{a}_1 = \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)u - \frac{\mathfrak{h}_1 u_1}{r_1} \qquad \mathfrak{b}_1 = \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)v - \frac{\mathfrak{h}_1 v_1}{r_1} \qquad 35)$$

genügt wird, so findet man durch Einsetzung derselben in die erste

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right) L(u, v) - \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1} L(u_1, v_1) = \mathfrak{h}_1 \\ & \mathfrak{h}_1 = \frac{r_1 L(u, v)}{r_1 + L(u_1, v_1) - L(u, v)}. \end{aligned} \qquad 36)$$

Es wird aber, wenn man in der Identität 7)

$$x = u \qquad y = v$$

setzt,

$$(r_2 + r_3)^2 L(u, v) = D_1 \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} + 2 r_2 r_3 (r_2 + r_3),$$

und da das Product

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 - u_1, & v_2 - v_1 \\ u_3 - u_1, & v_3 - v_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 - u, & v_2 - v \\ u_3 - u, & v_3 - v \end{vmatrix}$$

durch zeilenweise Multiplication mit Hilfe der Gleichungen 2), 33) sich

$$\begin{aligned} & = \begin{vmatrix} r_2(r_1 + r_2), & r_2(r_1 - r_3) \\ r_3(r_1 - r_2), & r_3(r_1 + r_3) \end{vmatrix} \\ & = 2 r_1 r_2 r_3 (r_2 + r_3) \end{aligned}$$

ergibt, so findet man

$$\begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 2 r_1 r_2 r_3 \frac{(r_2 + r_3)}{\Delta} \qquad 37)$$

$$L(u, v) = \frac{2 r_2 r_3}{\Delta} \left(\frac{\Delta + r_1 D_1}{r_2 + r_3}\right), \qquad 38)$$

und ähnlich

$$M(u, v) = \frac{2r_3r_1}{\Delta}\left(\frac{\Delta + r_2 D_2}{r_3 + r_1}\right) \tag{39}$$

$$N(u, v) = \frac{2r_1r_2}{\Delta}\left(\frac{\Delta + r_3 D_3}{r_1 + r_2}\right). \tag{40}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 16), 38) erhält man sodann nach leichter auf der Gleichung 15) beruhender Vereinfachung aus 36)

$$\mathfrak{h}_1 = \frac{\Delta(r_2 + r_3)}{\Delta + D_1(r_1 + r_2 + r_3)}. \tag{41}$$

Bezeichnen ξ, η die Coordinaten des Punktes, in welchem der Kreis $\mathfrak{H}_1$ die Gerade L berührt, so hat man

$$\xi = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{h}_1 A_1 \qquad \eta = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{h}_1 B_1,$$

oder identisch in Bezug auf x, y

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (x-\mathfrak{a}_1)^2 + (y-\mathfrak{b}_1)^2 - \mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 L,$$

und daher, wenn der Reihe nach

$$x = u_2 \qquad y = v_2$$

$$x = u_3 \qquad y = v_3$$

gesetzt wird, nach 34), 1)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_2(\xi, \eta) &= \mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - \mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 r_2 \\
&= \mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - \mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1 r_1 \\
\mathfrak{K}_3(\xi, \eta) &= \mathfrak{K}_3(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - \mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 r_3 \\
&= \mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - \mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1 r_1 \\
\mathfrak{K}_2(\xi, \eta) &- \mathfrak{K}_3(\xi, \eta) = 0.
\end{aligned}$$

Der Berührungspunkt (ξ, η) liegt also auf der inneren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$.

Es ist ferner nach 35), 41)

$$M(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right) M(u, v) - \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1} M(u_1, v_1)$$

$$1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1} = \mathfrak{h}_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\mathfrak{h}_1}\right) = \mathfrak{h}_1\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{\Delta r_1}\right)\left(\frac{\Delta + r_1 D_1}{r_2 + r_3}\right)$$

$$= \frac{\Delta}{4r_1^2 r_2 r_3}\left(\frac{\Delta + r_1 D_1}{r_2 + r_3}\right)\mathfrak{h}_1,$$

und daher nach 1), 39), 22)

$$M(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{h}_1\left[-1 + \frac{1}{2r_1r_2}\left(\frac{\Delta + r_1 D_1}{r_2 + r_3}\right)\left(\frac{\Delta + r_2 D_2}{r_3 + r_1}\right)\right]$$

$$= (1 + 2\gamma)\mathfrak{h}_1.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$N(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = (1 + 2\beta)\mathfrak{h}_1.$$

Wird nun von diesen Gleichungen die erste der Gleichungen 34) abgezogen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
L(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= \mathfrak{h}_1 \\
M(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - L(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= 2\gamma\,\mathfrak{h}_1 \\
N(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - L(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= 2\beta\,\mathfrak{h}_1,
\end{aligned} \tag{42}$$

und man schliesst, dass der Kreis $\mathfrak{H}_1$ die Seiten des Dreiecks

$$L=0 \qquad M-L=0 \qquad N-L=0$$

berührt. Es ist aber bekanntlich

$$M-L=0$$

die Gleichung der Halbirungslinie des Innen- oder Aussenwinkels bei C, je nachdem die Ausdrücke L, M im Innern des Dreiecks ABC Werthe von gleichen oder entgegengesetzten Zeichen annehmen; dasselbe gilt von der Gleichung

$$N-L=0.$$

Zieht man noch die Kreise $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ in Betracht, welche bezüglich den Dreiecken

$$\begin{array}{lll} M=0 & \mathfrak{K}_2-\mathfrak{K}_1=0 & \mathfrak{K}_2-\mathfrak{K}_3=0 \\ N=0 & \mathfrak{K}_3-\mathfrak{K}_1=0 & \mathfrak{K}_3-\mathfrak{K}_2=0, \end{array}$$

und zwar in der Weise eingeschrieben sind, dass ihre Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{h}_2)$ $(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{h}_3)$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} &M(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)=\mathfrak{h}_2 \\ &\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)-\mathfrak{K}_3(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)=2\mathfrak{h}_2(r_2+r_3) \\ &\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)-\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)=2\mathfrak{h}_2(r_2+r_1) \\ &N(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)=\mathfrak{h}_3 \\ &\mathfrak{K}_3(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)-\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)=2\mathfrak{h}_3(r_3+r_1) \\ &\mathfrak{K}_3(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)-\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)=2\mathfrak{h}_3(r_3+r_2) \end{aligned}$$

genügen, so müssen diese Kreise auch bezüglich den Dreiecken

$$\begin{array}{lll} M=0 & N-M=0 & L-M=0 \\ N=0 & L-N=0 & M-N=0 \end{array}$$

nach Massgabe der Gleichungen

$$\begin{aligned} &M(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)=\mathfrak{h}_2 \\ &N(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)-M(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)=2\alpha\mathfrak{h}_2 \\ &L(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)-M(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)=2\gamma\mathfrak{h}_2 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &N(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)=\mathfrak{h}_3 \\ &L(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)-N(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)=2\beta\mathfrak{h}_3 \\ &M(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)-N(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)=2\alpha\mathfrak{h}_3 \end{aligned} \tag{44}$$

eingeschrieben sein, und es sind die gemeinschaftlichen inneren Tangenten der Kreispaare $(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$, $(\mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_1)$, $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ zugleich gemeinschaftliche Tangenten der Kreispaare $(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3)$, $(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_1)$, $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ und gehen bezüglich durch die Berührungspunkte von $\mathfrak{H}_1$ mit L, $\mathfrak{H}_2$ mit M, $\mathfrak{H}_3$ mir N.

Hiemit ist die Steiner'sche Construction[1] vollständig bewiesen.

Da es von Interesse ist, die Elemente dieser Construction durch Gleichungen darzustellen, welche nur unmittelbar gegebene Grössen enthalten, so soll dies hier in Kürze durchgeführt werden.

Zieht man in dem Dreiecke ABC die Halbirungslinien

$$M-N=0 \qquad N-L=0 \qquad L-M=0,$$

und beschreibt drei Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, welche bezüglich die Geraden

---

[1] Einige geometrische Betrachtungen, 14 im I. Bande des Crelle'schen Journals.

$$L=0 \qquad M-L=0 \qquad N-L=0$$
$$M=0 \qquad N-M=0 \qquad L-M=0$$
$$N=0 \qquad L-N=0 \qquad M-N=0$$

nach Massgabe der Gleichungen 42), 43), 44) berühren, so sind die Gleichungen der Verbindungslinien der Punkte n_1, n_2, n_3, in denen die Kreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ bezüglich die Dreiecksseiten L, M, N berühren, mit den gegenüberliegenden Ecken

$$\beta(1+\beta)M-\gamma(1+\gamma)N=0$$
$$\gamma(1+\gamma)N-\alpha(1+\alpha)L=0$$
$$\alpha(1+\alpha)L-\beta(1+\beta)M=0.$$

Um nun zu untersuchen, ob durch den Punkt n_1 eine gemeinschaftliche Tangente der Kreise $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ geht, bestimme man in dem Ausdrucke

$$f(x,y)=\lambda L-\mu[\beta(1+\beta)M-\gamma(1+\gamma)N]$$

die Constanten λ, μ derart, dass

$$\frac{f(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{b}_2)}{2\mathfrak{h}_2}+\frac{f(\mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_3)}{2\mathfrak{h}_3}=0$$

werde. Nach 43), 44) lautet diese Bedingung

$$(1+\beta+\gamma)[\lambda-(1+\alpha)(\beta-\gamma)\mu]=0\,,$$

und wird erfüllt, wenn man

$$\lambda=(1+\alpha)(\beta-\gamma)\mu$$

setzt, wodurch

$$f(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{b}_2)=\mu[2\alpha\beta\gamma+\alpha(\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)^2]\,\mathfrak{h}_2$$
$$f(\mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_3)=-\mu[2\alpha\beta\gamma+\alpha(\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)^2]\,\mathfrak{h}_3$$

entspringt. Nimmt man also

$$\mu=\frac{1}{2\alpha\beta\gamma+\alpha(\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)^2},$$

oder

$$f(x,y)=\frac{(1+\alpha)(\beta-\gamma)L-\beta(1+\beta)M+\gamma(1+\gamma)N}{2\alpha\beta\gamma+\alpha(\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)^2},$$

so wird

$$f(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{h}_2 \qquad f(\mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_3)=-\mathfrak{h}_3,$$

und da die Summe der Quadrate der Coëfficienten von x und y in $f(x,y)$ durch eine leichte Rechnung $=1$ gefunden wird, so schliesst man, dass die Gerade

$$P=(1+\alpha)(\beta-\gamma)L-\beta(1+\beta)M+\gamma(1+\gamma)N=0$$

n der That eine gemeinschaftliche innere oder äussere Tangente der Kreise $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ ist, je nachdem $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen besitzen.

Ebenso stellen die Gleichungen

$$Q=\alpha(1+\alpha)L+(1+\beta)(\gamma-\alpha)M-\gamma(1+\gamma)N=0 \tag{45}$$
$$R=-\alpha(1+\alpha)L+\beta(1+\beta)M+(1+\gamma)(\alpha-\beta)N=0 \tag{46}$$

zwei Gerade dar, welche bezüglich durch die Punkte n_2, n_3 gehen und gemeinschaftliche Tangenten der Kreispaare ($\mathfrak{H}_3$, $\mathfrak{H}_1$), ($\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$) sind.

Die Geraden P, Q, R schneiden sich in einem Punkte. Denn es ist identisch

$$\frac{Q+R}{\beta+\gamma-\alpha}=(1+\beta)\,M-(1+\gamma)\,N$$

$$\frac{R+P}{\gamma+\beta-\alpha}=(1+\gamma)\,N-(1+\alpha)\,L$$

$$\frac{P+Q}{\alpha+\beta-\gamma}=(1+\alpha)\,L-(1+\beta)\,M,$$

und es gehen daher P, Q, R durch den nämlichen Punkt, in welchem sich die Geraden

$$(1+\beta)M-(1+\gamma)\,N=0$$
$$(1+\gamma)\,N-(1+\alpha)\,L=0$$
$$(1+\alpha)\,L-(1+\beta)\,M=0$$

schneiden.

Ist

$$\mathfrak{K}_1=(x-u_1)^2+(y-v_1)^2-r_1^2=0$$

die Gleichung eines Kreises, welcher die Geraden M, N, Q nach Massgabe der Gleichungen

$$M(u_1, v_1)=r_1$$
$$N(u_1, v_1)=r_1$$
$$Q(u_1, v_1)=r_1\,[2\alpha\beta\gamma+\beta(\gamma+\alpha)-(\gamma-\alpha)^2]$$

berührt, so ist nach 45)

$$L(u_1, v_1)=r_1\left[\frac{2(1+\beta)(1+\gamma)}{1+\alpha}-1\right],$$

und daher der Kreis $\mathfrak{K}_1$ derselbe, welcher den Gleichungen 25), 26) genügt. Da überdies

$$R(u_1, v_1)=-r_1\,[2\alpha\beta\gamma+\gamma(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)^2]$$

wird, so berührt $\mathfrak{K}_1$ auch die Gerade R. Ebenso überzeugt man sich, dass sich in die Vierseite

$$N=0 \quad L=0 \quad R=0 \quad P=0$$
$$L=0 \quad M=0 \quad P=0 \quad Q=0$$

zwei Kreise $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ einschreiben lassen, welche mit den durch die Formeln 27) bis 30) gegebenen identisch sind.

4.

Die wirkliche Construction der Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ ist nicht nothwendig; vielmehr reicht die Kenntniss ihrer Mittelpunkte und Berührungspunkte mit den Dreiecksseiten aus. Um dies näher auszuführen, werde ich mich auf den einfachsten Fall beschränken, in welchem die Ausdrücke L, M, N innerhalb des gegebenen Dreiecks positiv, die Quadratwurzeln α, β, γ mit dem positiven Zeichen angenommen werden und demgemäss die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ innerhalb des Dreiecks liegen.

Es seien p_1, p_2, p_3 die Punkte, in denen die Halbirungslinien der Innenwinkel A, B, C des gegebenen Dreiecks ABC die Gegenseiten treffen; m_1, m_2, m_3 bezüglich die Durchschnittspunkte der Halbirungslinien der Winkel CBp_2 und BCp_3, ACp_3 und CAp_1, BAp_1 und ABp_2; n_1, n_2, n_3 die Fusspunkte der von m_1, m_2, m_3 bezüglich auf die Seiten BC, CA, AB gefällten Lothe und q_1, q_2, q_3 die Punkte, in denen die Geraden m_2m_3, m_3m_1, m_1m_2 von den Halbirungslinien Ap_1, Bp_2, Cp_3 geschnitten werden. Aus einer genaueren Betrachtung des Dreiecks $n_1\,p_1\,q_1$ ergibt sich dann, dass die Verbindungslinie des Punktes p_1 mit dem Durch-

schnittspunkte der Geraden Bp_2 und Am_3 und die Verbindungslinie des Punktes n_1 mit dem Mittelpunkte des Kreises $\mathfrak{K}_2$, welche einen äusseren und inneren Winkel (oder umgekehrt) bei p_1 und n_1 in dem genannten Dreiecke halbiren, sich auf der Halbirungslinie $m_2 m_3$ des Aussenwinkels bei q_1 schneiden müssen.

Man kann daher den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}_1$ in folgender Weise finden. Man bestimme den Punkt s_{21}, in welchem die Gerade $m_1 m_3$ von der Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der Geraden Ap_1, Bm_3 mit dem Punkte p_2, oder auch den Punkt s_{31}, wo die Gerade $m_1 m_2$ von der Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der Geraden Ap_1, Cm_2 mit dem Punkte p_3 getroffen wird; die Geraden $n_2 s_{21}$, $n_3 s_{31}$ schneiden sich alsdann auf der Halbirungslinie Ap_1 im Mittelpunkte des Kreises $\mathfrak{K}_1$. Die Geraden $n_1 q_1$, $n_2 q_2$, $n_3 q_3$ sind die gemeinschaftlichen inneren Tangenten der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ und geben deren Halbmesser. (S. d. Figur.)

5.

Steiner hat die Malfatti'sche Aufgabe in folgender Weise verallgemeinert[1]:

Drei beliebige Kreise, die in einerlei Ebene liegen, sind der Grösse und Lage nach gegeben; man soll drei andere Kreise beschreiben, die einander berühren, und von denen jeder zwei der gegebenen Kreise berührt, jedoch so, dass auch jeder der drei gegebenen Kreise zwei von den zu suchenden berührt.

Es seien

$$K_1 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - h_1^2 = 0$$
$$K_2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - h_2^2 = 0$$
$$K_3 = (x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 - h_3^2 = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Kreise, von welchen vorausgesetzt werden soll, dass ihre Mittelpunkte nicht in einer geraden Linie liegen, oder, was dasselbe ist, dass der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1$$

von Null verschieden ist,

$$\mathfrak{K}_1 = (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 - r_1^2 = 0$$
$$\mathfrak{K}_2 = (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 - r_2^2 = 0$$
$$\mathfrak{K}_3 = (x-u_3)^2 + (y-v_3)^2 - r_3^2 = 0$$

die Gleichungen der gesuchten Kreise und zur Abkürzung

$$(a_2-a_3)^2 + (b_2-b_3)^2 - (h_2-h_3)^2 = d_1^2$$
$$(a_3-a_1)^2 + (b_3-b_1)^2 - (h_3-h_1)^2 = d_2^2$$
$$(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 - (h_1-h_2)^2 = d_3^2$$
$$(a_2-a_3)^2 + (b_2-b_3)^2 = a^2$$
$$(a_3-a_1)^2 + (b_3-b_1)^2 = b^2$$
$$(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 = c^2,$$

so dass a, b, c die Längen der Seiten des von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise gebildeten Dreiecks bezeichnen. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen der Aufgabe sind dann, abgesehen

[1] L. c. 15.

von den Auflösungen, wo zwei der gesuchten Kreise einen der gegebenen in einem und demselben Punkte berühren,

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1(a_2, b_2) &= h_2^2 + 2h_2 r_1\\ \mathfrak{K}_1(a_3, b_3) &= h_3^2 + 2h_3 r_1\\ \mathfrak{K}_2(a_3, b_3) &= h_3^2 + 2h_3 r_2\\ \mathfrak{K}_2(a_1, b_1) &= h_1^2 + 2h_1 r_2\\ \mathfrak{K}_3(a_1, b_1) &= h_1^2 + 2h_1 r_3\\ \mathfrak{K}_3(a_2, b_2) &= h_2^2 + 2h_2 r_3\end{aligned} \qquad 47)$$

$$\begin{aligned}(u_2-u_3)^2 + (v_2-v_3)^2 &= (r_2+r_3)^2\\ (u_3-u_1)^2 + (v_3-v_1)^2 &= (r_3+r_1)^2\\ (u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2 &= (r_1+r_2)^2.\end{aligned} \qquad 48)$$

Zur Auflösung dieser Gleichungen führt ein ähnliches Verfahren, wie es in dem Falle der einfachen Malfatti'schen Aufgabe angewandt worden ist, nämlich die Ausdrückung der Functionen K_1, K_2, K_3 und der Grössen d_1^2, d_2^2, d_3^2 durch die Unbekannten der Aufgabe.

Aus den in 47), 48) enthaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned}(a_1-u_2)^2 + (b_1-v_2)^2 &= (r_2+h_1)^2\\ (a_1-u_3)^2 + (b_1-v_3)^2 &= (r_3+h_1)^2\\ (u_2-u_3)^2 + (v_2-v_3)^2 &= (r_2+r_3)^2\end{aligned} \qquad 49)$$

folgt, wenn

$$a_1 = \frac{1}{2}(u_2+u_3)+p \qquad b_1 = \frac{1}{2}(v_2+v_3)+q \qquad 50)$$

gesetzt wird,

$$p^2+q^2-(u_2-u_3)p-(v_2-v_3)q+\frac{1}{4}(r_2+r_3)^2 = (r_2+h_1)^2$$

$$p^2+q^2+(u_2-u_3)p+(v_2-v_3)q+\frac{1}{4}(r_2+r_3)^2 = (r_3+h_1)^2,$$

und hieraus

$$p^2+q^2 = h_1^2+h_1(r_2+r_3)+\frac{1}{4}(r_2-r_3)^2 \qquad 51)$$

$$(u_2-u_3)p+(v_2-v_3)q = -(r_2-r_3)\left[h_1+\frac{1}{2}(r_2+r_3)\right]. \qquad 52)$$

Bildet man den Ausdruck

$$-(v_2-v_3)p+(u_2-u_3)q = D_1, \qquad 53)$$

welcher den Gleichungen 50) zufolge nichts anderes als die Determinante

$$-\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & u_2 & v_2\\ 1 & u_3 & v_3\end{vmatrix}$$

ist, und addirt die Quadrate der Gleichungen 52), 53), so wird nach 49), 51)

$$(r_2+r_3)^2(p^2+q^2) = D_1^2+(r_2-r_3)^2\left[h_1+\frac{1}{2}(r_2+r_3)\right]^2$$

$$\begin{aligned}D_1^2 &= (r_2+r_3)^2\left[h_1^2+h_1(r_2+r_3)+\frac{1}{4}(r_2-r_3)^2\right]-(r_2-r_3)^2\left[h_1+\frac{1}{2}(r_2+r_3)\right]^2\\ &= 4h_1r_2r_3(h_1+r_2+r_3),\end{aligned} \qquad 54)$$

und durch Auflösung der linearen Gleichungen 52), 53)

$$(r_2+r_3)^2 p = -(r_2-r_3)\left[h_1+\frac{1}{2}(r_2+r_3)\right](u_2-u_3)-D_1(v_2-v_3)$$

$$(r_2+r_3)^2 q = -(r_2-r_3)\left[h_1+\frac{1}{2}(r_2+r_3)\right](v_2-v_3)+D_1(u_2-u_3)$$

Diese Werthe haben, in 50) eingesetzt, die Gleichungen

$$(r_2+r_3)^2 a_1 = (r_2+r_3)(r_3u_2+r_2u_3)-h_1(r_2-r_3)(u_2-u_3)-D_1(v_2-v_3)$$

$$(r_2+r_3)^2 b_1 = (r_2+r_3)(r_3v_2+r_2v_3)-h_1(r_2-r_3)(v_2-v_3)+D_1(u_2-u_3)$$

$$(r_2+r_3)^2 K_1 = (r_2+r_3)(r_3\mathfrak{K}_2+r_2\mathfrak{K}_3)-h_1(r_2-r_3)(\mathfrak{K}_2-\mathfrak{K}_3) + 2D_1\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & u_2 & v_2\\ 1 & u_3 & v_3\end{vmatrix}+C$$

zur Folge. Die Constante C bestimmt man durch eine der Gleichungen 49) z. B. die erste, indem man

$$x=u_2 \qquad y=v_2$$

setzt, und findet nach leichter Vereinfachung

$$C=4h_1r_2r_3(r_2+r_3),$$

so dass also identisch in Bezug auf x, y

$$(r_2+r_3)^2 K_1 = (r_2+r_3)(r_3\mathfrak{K}_2+r_2\mathfrak{K}_3)-h_1(r_2-r_3)(\mathfrak{K}_2-\mathfrak{K}_3) + 2D_1\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & u_2 & v_2\\ 1 & u_3 & v_3\end{vmatrix}+4h_1r_2r_3(r_2+r_3) \tag{55}$$

wird.

Durch Buchstabenverwandlung ergeben sich noch die Identitäten

$$(r_3+r_1)^2 K_2 = (r_3+r_1)(r_1\mathfrak{K}_3+r_3\mathfrak{K}_1)-h_2(r_3-r_1)(\mathfrak{K}_3-\mathfrak{K}_1) + 2D_2\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & u_3 & v_3\\ 1 & u_1 & v_1\end{vmatrix}+4h_2r_3r_1(r_3+r_1) \tag{56}$$

$$(r_1+r_2)^2 K_3 = (r_1+r_2)(r_2\mathfrak{K}_1+r_1\mathfrak{K}_2)-h_3(r_1-r_2)(\mathfrak{K}_1-\mathfrak{K}_2) + 2D_3\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & u_1 & v_1\\ 1 & u_2 & v_2\end{vmatrix}+4h_3r_1r_2(r_1+r_2), \tag{57}$$

wo

$$D_2^2 = 4h_2r_3r_1(h_2+r_3+r_1) \tag{58}$$

$$D_3^2 = 4h_3r_1r_2(h_3+r_1+r_2). \tag{59}$$

Setzt man in der Identität 55)

$$x=u_1 \qquad y=v_1,$$

so wird nach 48)

$$(r_2+r_3)^2 K_1(u_1, v_1) = (r_2+r_3)[(r_2+r_3)r_1^2+4r_1r_2r_3]-2h_1r_1(r_2-r_3)^2 + 2D_1\Delta+4h_1r_2r_3(r_2+r_3),$$

oder

$$(r_2+r_3)^2[K_1(u_1,v_1)-r_1^2+2h_1r_1]=4r_1r_2r_3(h_1+r_2+r_3)+4h_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)+2D_1\Delta,$$

wo Δ die nämliche Bedeutung, wie in 14) hat. Um die Fälle nicht auszuschliessen, in welchen einige der Halbmesser h_1, h_2, h_3 gleich Null sind, sei bei beliebiger Festsetzung der Zeichen der Wurzeln $\sqrt{h_1}$, $\sqrt{h_2}$, $\sqrt{h_3}$

$$D_1=\Delta_1\sqrt{h_1}\qquad D_2=\Delta_2\sqrt{h_2}\qquad D_3=\Delta_3\sqrt{h_3}, \tag{60}$$

so dass also nach 54), 58), 59)

$$\Delta_1^2=4r_2r_3(h_1+r_2+r_3)\qquad \Delta_2^2=4r_3r_1(h_2+r_3+r_1)\qquad \Delta_3^2=4r_1r_2(h_3+r_1+r_2)$$

ist. Es wird dann 15)

$$(r_2+r_3)^2[K_1(u_1,v_1)-r_1^2+2h_1r_1]=r_1\Delta_1^2+\frac{h_1}{r_1}\Delta^2+2\Delta\Delta_1\sqrt{h_1}$$
$$=\frac{1}{r_1}(r_1\Delta_1+\Delta\sqrt{h_1})^2,$$

oder

$$\mathfrak{K}_1(a_1,b_1)=h_1^2-2h_1r_1+\frac{1}{r_1}\left(\frac{r_1\Delta_1+\Delta\sqrt{h_1}}{r_2+r_3}\right)^2 \tag{61}$$

und durch Buchstabenvertauschung

$$\mathfrak{K}_2(a_2,b_2)=h_2^2-2h_2r_2+\frac{1}{r_2}\left(\frac{r_2\Delta_2+\Delta\sqrt{h_2}}{r_3+r_1}\right)^2 \tag{62}$$

$$\mathfrak{K}_3(a_3,b_3)=h_3^2-2h_3r_3+\frac{1}{r_3}\left(\frac{r_3\Delta_3+\Delta\sqrt{h_2}}{r_1+r_2}\right)^2. \tag{63}$$

Um d_1^2, d_2^2, d_3^2 durch die Unbekannten der Aufgabe auszudrücken, bemerke man, dass identisch

$$\begin{aligned}(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2-(h_2-h_3)^2&=(a_2-u_1)^2+(b_2-v_1)^2-(h_2+r_1)^2\\&+(a_3-u_1)^2+(b_3-v_1)^2-(h_3+r_1)^2\\&+2[(h_2+r_1)(h_3+r_1)-(a_2-u_1)(a_3-u_1)-(b_2-v_1)(b_3-v_1)],\end{aligned}$$

und daher nach 47)

$$\frac{1}{2}d_1^2=(h_2+r_1)(h_3+r_1)-(a_2-u_1)(a_3-u_1)-(b_2-v_1)(b_3-v_1) \tag{64}$$

ist. Entnimmt man nun den Identitäten 56), 57) die Werthe von a_2, b_2, a_3, b_3, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(r_3+r_1)^2(a_2-u_1)&=[r_1(h_2+r_3+r_1)-r_3h_2](u_3-u_1)-D_2(v_3-v_1)\\(r_3+r_1)^2(b_2-v_1)&=[r_1(h_2+r_3+r_1)-r_3h_2](v_3-v_1)+D_2(u_3-u_1)\\(r_1+r_2)^2(a_3-u_1)&=[r_1(h_3+r_1+r_2)-r_2h_3](u_2-u_1)-D_3(v_1-v_2)\\(r_1+r_2)^2(b_3-v_1)&=[r_1(h_3+r_1+r_2)-r_2h_3](v_2-v_1)+D_3(u_1-u_2)\end{aligned}$$

und durch Einsetzung dieser Ausdrücke in 64) mit Hilfe von 19)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2d_1^2&=(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2(r_1+h_2)(r_1+h_3)\\&-[r_1(r_1+r_2+r_3)-r_2r_3][r_1(h_2+r_3+r_1)-r_3h_2][r_1(h_3+r_1+r_2)-r_2h_3]\\&+D_2\Delta[r_1(h_3+r_1+r_2)-r_2h_3]+D_3\Delta[r_1(h_2+r_3+r_1)-r_3h_2]\\&+D_2D_3[r_1(r_1+r_2+r_3)-r_2r_3].\end{aligned} \tag{65}$$

Es sei nun, was den Gleichungen 15), 58), 59) zufolge gestattet ist,

$$\frac{r_1(r_1+r_2+r_3)-r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}=\cos\varphi \qquad \frac{\Delta}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}=\sin\varphi$$
$$\frac{r_1(h_2+r_3+r_1)-r_3h_2}{(r_1+h_2)(r_3+r_1)}=\cos\psi \qquad \frac{D_2}{(r_1+h_2)(r_3+r_1)}=\sin\psi \tag{66}$$
$$\frac{r_1(h_3+r_1+r_2)-r_2h_3}{(r_1+h_3)(r_1+r_2)}=\cos\chi \qquad \frac{D_3}{(r_1+h_3)(r_1+r_2)}=\sin\chi.$$

Alsdann ist

$$\frac{1}{2}d_1^2=(r_1+h_2)(r_1+h_3)[1-\cos(\varphi+\psi+\chi)]$$

$$d_1^2=4(r_1+h_2)(r_1+h_3)\sin^2\frac{1}{2}(\varphi+\psi+\chi)$$

und unter gehöriger Zeichenbestimmung der Quadratwurzeln, wobei $\sqrt{h_1}$, $\sqrt{h_2}$, $\sqrt{h_3}$ mit denselben Zeichen wie in 60) genommen werden,

$$\cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_1+r_2+r_3}}{\sqrt{r_1+r_2}\sqrt{r_1+r_3}} \qquad \sin\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1+r_2}\sqrt{r_1+r_3}}$$
$$\cos\frac{1}{2}\psi=\frac{\sqrt{r_1}\sqrt{h_2+r_3+r_1}}{\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_3+r_1}} \qquad \sin\frac{1}{2}\psi=\frac{\sqrt{r_3}\sqrt{h_2}}{\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_3+r_1}}$$
$$\cos\frac{1}{2}\chi=\frac{\sqrt{r_1}\sqrt{h_3+r_1+r_2}}{\sqrt{r_1+h_3}\sqrt{r_1+r_2}} \qquad \sin\frac{1}{2}\chi=\frac{\sqrt{r_2}\sqrt{h_3}}{\sqrt{r_1+h_3}\sqrt{r_1+r_2}}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi+\chi)=&\frac{-r_2r_3\sqrt{h_2}\sqrt{h_3}+r_1\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}\sqrt{h_2+r_3+r_1}\sqrt{h_3+r_1+r_2}}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_1+h_3}}\\&+r_1\sqrt{r_1+r_2+r_3}\left(\frac{\sqrt{r_3}\sqrt{h_2}\sqrt{h_3+r_1+r_2}+\sqrt{r_2}\sqrt{h_3}\sqrt{h_2+r_3+r_1}}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_1+h_3}}\right)\\=&-\frac{\sqrt{h_2}\sqrt{h_3}}{\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_1+h_3}}\\&+r_1\frac{(\sqrt{h_2}\sqrt{r_1+r_2+r_3}+\sqrt{r_2}\sqrt{h_2+r_3+r_1})(\sqrt{h_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3}+\sqrt{r_3}\sqrt{h_3+r_1+r_2})}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_1+h_3}}\end{aligned}$$

$$\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_1+h_3}\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi+\chi)=-\sqrt{h_2}\sqrt{h_3}+\frac{1}{4r_2r_3}\left(\frac{r_2\Delta_2+\Delta\sqrt{h_2}}{r_3+r_1}\right)\left(\frac{r_3\Delta_3+\Delta\sqrt{h_3}}{r_1+r_2}\right).$$

Hienach wird, wovon man sich auch ohne Hilfe der trigonometrischen Formeln 66) durch eine unmittelbare Umgestaltung der Gleichung 65) überzeugen kann,

$$d_1=-2\sqrt{h_2}\sqrt{h_3}+\frac{1}{2r_2r_3}\left(\frac{r_2\Delta_2+\Delta\sqrt{h_2}}{r_3+r_1}\right)\left(\frac{r_3\Delta_3+\Delta\sqrt{h_3}}{r_1+r_2}\right).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\begin{aligned}d_1+2\sqrt{h_2}\sqrt{h_3}&=p_1\\d_2+2\sqrt{h_3}\sqrt{h_1}&=p_2\\d_3+2\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}&=p_3,\end{aligned}\tag{67}$$

so erhält man die Formeln

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2r_2r_3}\left(\frac{r_2\Delta_2+\Delta\sqrt{h_2}}{r_3+r_1}\right)\left(\frac{r_3\Delta_3+\Delta\sqrt{h_3}}{r_1+r_2}\right)\\
p_2 &= \frac{1}{2r_3r_1}\left(\frac{r_3\Delta_3+\Delta\sqrt{h_3}}{r_1+r_2}\right)\left(\frac{r_1\Delta_1+\Delta\sqrt{h_1}}{r_2+r_3}\right)\\
p_3 &= \frac{1}{2r_1r_2}\left(\frac{r_1\Delta_1+\Delta\sqrt{h_1}}{r_2+r_3}\right)\left(\frac{r_2\Delta_2+\Delta\sqrt{h_2}}{r_3+r_1}\right)
\end{aligned} \tag{68}
$$

6.

Schafft man aus den Gleichungen 61), 62), 63), 68) die Ausdrücke

$$
\frac{r_1\Delta_1+\Delta\sqrt{h_1}}{r_2+r_3},\quad \frac{r_2\Delta_2+\Delta\sqrt{h_2}}{r_3+r_1},\quad \frac{r_3\Delta_3+\Delta\sqrt{h_3}}{r_1+r_2}
$$

fort, so wird

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1(a_1, b_1) &= h_1^2+2r_1(h_1+l)\\
\mathfrak{K}_2(a_2, b_2) &= h_2^2+2r_2(h_2+m)\\
\mathfrak{K}_3(a_3, b_3) &= h_3^2+2r_3(h_3+n),
\end{aligned} \tag{69}
$$

wo zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\frac{p_2p_3}{p_1}-2h_1 &= l\\
\frac{p_3p_1}{p_2}-2h_2 &= m\\
\frac{p_1p_2}{p_3}-2h_3 &= n
\end{aligned} \tag{70}
$$

gesetzt worden ist, und es können die Gleichungen 69) statt der Gleichungen 48) in Verbindung mit den Gleichungen 47) zur Bestimmung von (u_1, v_1, r_1) (u_2, v_2, r_2) (u_3, v_3, r_3) dienen. Man hat dann den Vortheil, dass die Bestimmungsstücke der drei gesuchten Kreise von einander getrennt sind, und erhält die auf den Kreis $\mathfrak{K}_1$ sich beziehenden aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1(a_1, b_1) &= h_1^2+2r_1(h_1+l)\\
\mathfrak{K}_1(a_2, b_2) &= h_2^2+2r_1h_2\\
\mathfrak{K}_1(a_3, b_3) &= h_3^2+2r_1h_3.
\end{aligned} \tag{71}
$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, sei

$$
K=(x-f)^2+(y-g)^2-h^2=0 \tag{72}
$$

die Gleichung des Kreises, welcher die drei gegebenen Kreise K_1, K_2, K_3 senkrecht schneidet, so dass also

$$
K_1(f,g)=K_2(f,g)=K_3(f,g)=h^2 \tag{73}
$$

ist, und man setze

$$
\mathfrak{K}_1-K=2r_1(\mathfrak{A}_1x+\mathfrak{B}_1y+\mathfrak{C}_1).
$$

In Folge der Gleichungen 71), 73) genügen dann die Coëfficienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
a_1\mathfrak{A}_1+b_1\mathfrak{B}_1+\mathfrak{C}_1 &= h_1+l\\
a_2\mathfrak{A}_1+b_2\mathfrak{B}_1+\mathfrak{C}_1 &= h_2\\
a_3\mathfrak{A}_1+b_3\mathfrak{B}_1+\mathfrak{C}_1 &= h_3,
\end{aligned} \tag{74}
$$

durch welche sie vollkommen bestimmt sind, und es ist identisch

$$\mathfrak{K}_1 = K + 2r_1(\mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{B}_1 y + \mathfrak{C}_1), \tag{75}$$

also namentlich

$$u_1 = f - \mathfrak{A}_1 r_1 \qquad v_1 = g - \mathfrak{B}_1 r_1. \tag{76}$$

Zur Bestimmung des Halbmessers r_1 dient die Formel

$$-\mathfrak{K}_1(u_1, v_1) - r_1^2 = 0,$$

aus welcher durch Einsetzung der Werthe 76) in die Identität 75) die quadratische Gleichung

$$P_1 r_1^2 - 2Q_1 r_1 + h^2 = 0 \tag{77}$$

entspringt; hierin ist zur Abkürzung

$$\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1^2 - 1 = P_1$$
$$\mathfrak{A}_1 f + \mathfrak{B}_1 g + \mathfrak{C}_1 = Q_1$$

gesetzt worden.

Auf dieselbe Weise findet man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_2 &= K + 2r_2(\mathfrak{A}_2 x + \mathfrak{B}_2 y + \mathfrak{C}_2) \\ u_2 &= f - r_2 \mathfrak{A}_2 \qquad v_2 = g - r_2 \mathfrak{B}_2 \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$P_2 r_2^2 - 2Q_2 r_2 + h^2 = 0 \tag{79}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_3 &= K + 2r_3(\mathfrak{A}_3 x + \mathfrak{B}_3 y + \mathfrak{C}_3) \\ u_3 &= f - r_3 \mathfrak{A}_3 \qquad v_3 = g - r_3 \mathfrak{B}_3 \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$P_3 r_3^2 - 2Q_3 r_3 + h^2 = 0, \tag{81}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a_1 \mathfrak{A}_2 + b_1 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 &= h_1 \\ a_2 \mathfrak{A}_2 + b_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 &= h_2 + m \\ a_3 \mathfrak{A}_2 + b_3 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 &= h_3 \\ \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{B}_2^2 - 1 &= P_2 \\ \mathfrak{A}_2 f + \mathfrak{B}_2 g + \mathfrak{C}_2 &= Q_2 \end{aligned}\right. \tag{82}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 \mathfrak{A}_3 + b_1 \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_3 &= h_1 \\ a_2 \mathfrak{A}_3 + b_2 \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_3 &= h_2 \\ a_3 \mathfrak{A}_3 + b_3 \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_3 &= h_3 + n \\ \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{B}_3^2 - 1 &= P_3 \\ \mathfrak{A}_3 f + \mathfrak{B}_3 g + \mathfrak{C}_3 &= Q_3. \end{aligned}\right. \tag{83}$$

Es bleibt noch zu untersuchen, welche Wurzeln der quadratischen Gleichungen 77), 79), 81) einander zuzuordnen sind, damit den Gleichungen 48) genügt werde. Um jede Unklarheit zu vermeiden, will ich annehmen, dass keiner der Ausdrücke P_1, P_2, P_3 verschwindet, dass also die genannten quadratischen Gleichungen je zwei endliche Wurzeln haben und keiner der gefundenen Kreise in eine Gerade ausartet; ein solcher Fall kann als Grenzfall betrachtet werden und bedarf keiner besonderen Behandlung.

Zur Auflösung der Gleichung 77) ist vor allem die Kenntniss des Ausdruckes

$$Q_1^2 - h^2 P_1 = (P_1 r_1 - Q_1)^2$$

nothwendig, welcher in folgender Weise gefunden werden kann.

Den Gleichungen 74), 76) zufolge ist

$$\begin{aligned} (u_1 - a_1)\mathfrak{A}_1 + (v_1 - b_1)\mathfrak{B}_1 + r_1 + h_1 + l + P_1 r_1 - Q_1 &= 0 \\ (u_1 - a_2)\mathfrak{A}_1 + (v_1 - b_2)\mathfrak{B}_1 + r_1 + h_2 \qquad + P_1 r_1 - Q_1 &= 0 \\ (u_1 - a_3)\mathfrak{A}_1 + (v_1 - b_3)\mathfrak{B}_1 + r_1 + h_3 \qquad + P_1 r_1 - Q_1 &= 0, \end{aligned}$$

woraus, durch Beseitigung von $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1$

$$\begin{vmatrix} u_1-a_1, & v_1-b_1, & r_1+h_1+l+P_1r_1-Q_1 \\ u_1-a_2, & v_1-b_2, & r_1+h_2\quad +P_1r_1-Q_1 \\ u_1-a_3, & v_1-b_3, & r_1+h_3\quad +P_1r_1-Q_1 \end{vmatrix}=0,$$

oder

$$-D(P_1r_1-Q_1)=\begin{vmatrix} u_1-a_1, & v_1-b_1, & r_1+h_1+l \\ u_1-a_2, & v_1-b_2, & r_1+h_2 \\ u_1-a_3, & v_1-b_3, & r_1+h_3 \end{vmatrix}$$

entspringt. Durch zeilenweise Multiplication ist nun

$$D^2(P_1r_1-Q_1)^2=\begin{vmatrix} u_1-a_1, & v_1-b_1, & r_1+h_1+l \\ u_1-a_2, & v_1-b_2, & r_1+h_2 \\ u_1-a_3, & v_1-b_3, & r_1+h_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1-u_1, & b_1-v_1, & r_1+h_1+l \\ a_2-u_1, & b_2-v_1, & r_1+h_2 \\ a_3-u_1, & b_3-v_1, & r_1+h_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda & \nu' & \mu' \\ \nu' & \mu & \lambda' \\ \mu' & \lambda' & \nu \end{vmatrix},$$

wo auf Grund der Gleichungen 71), 70)

$$\lambda=(r_1+h_1+l)^2-(u_1-a_1)^2-(v_1-b_1)^2=\frac{lp_2p_3}{p_1}$$

$$=\frac{p_2p_3}{p_1^2}\left[d_2d_3+2\sqrt{h_1}\left(d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3}-d_1\sqrt{h_1}\right)\right]$$

$$\mu=(r_1+h_2)^2-(u_1-a_2)^2-(v_1-b_2)^2=0$$

$$\nu=(r_1+h_3)^2-(u_1-a_3)^2-(v_1-b_3)^2=0$$

$$\lambda'=(r_1+h_2)(r_1+h_3)-(a_2-u_1)(a_3-u_1)-(b_2-v_1)(b_3-v_1)$$

$$=\frac{1}{2}d_1^2$$

$$\mu'=(r_1+h_1+l)(r_1+h_3)-(a_1-u_1)(a_3-u_1)-(b_1-v_1)(b_3-v_1)$$

$$=(r_1+h_1+l)(r_1+n_3)+\frac{1}{2}d_2^2+\frac{1}{2}(h_1-h_3)^2$$

$$-\frac{1}{2}\left[(u_1-a_1)^2+(v_1-b_1)^2+(u_1-a_3)^2+(v_1-b_3)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}d_2^2+lh_3$$

$$=\frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1}{2}d_1d_2+\sqrt{h_3}\left(d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3}-d_1\sqrt{h_1}\right)\right]$$

$$\nu'=(r_1+h_1+l)(r_1+h_2)-(u_1-a_1)(u_1-a_2)-(v_1-b_1)(v_1-b_2)$$

$$=\frac{1}{2}d_3^2+lh_2$$

$$=\frac{p_3}{p_1}\left[\frac{1}{2}d_1d_3+\sqrt{h_2}\left(d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3}-d_1\sqrt{h_1}\right)\right]$$

ist. Hiernach wird also durch Entwicklung der Determinante

$$D^2(Q_1^2-h^2P_1)=\lambda'(2\mu'\nu'-\lambda\lambda')$$

$$=\frac{{}_3p\,{}_2p}{{}_1p^2}d_1^2\left(-d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3}\right)^2 \tag{84}$$

und durch Buchstabenvertauschung

$$D^2(Q_2^2-h^2P_2)=\frac{p_3p_1}{2p_2}d_2^2(d_1\sqrt{h_1}-d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3})^2 \tag{85}$$

$$D^2(Q_3^2-h^2P_3)=\frac{p_1p_2}{2p_3}d_3^2(d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2}-d_3\sqrt{h_3})^2. \tag{86}$$

Mit Hilfe dieser Formeln ergeben sich für die Wurzeln der Gleichungen 77), 79), 81) die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
r_1&=\frac{Q_1}{P_1}+\frac{d_1(-d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3})}{DP_1}\sqrt{\frac{p_2p_3}{2p_1}}\\
\frac{h^2}{r_1}&=Q_1-\frac{d_1(-d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3})}{D}\sqrt{\frac{p_2p_3}{2p_1}}\\
r_2&=\frac{Q_2}{P_2}+\frac{d_2(d_1\sqrt{h_1}-d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3})}{DP_2}\sqrt{\frac{p_3p_1}{2p_2}}\\
\frac{h^2}{r_2}&=Q_2-\frac{d_2(d_1\sqrt{h_1}-d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3})}{D}\sqrt{\frac{p_3p_1}{2p_2}}\\
r_3&=\frac{Q_3}{P_3}+\frac{d_3(d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2}-d_3\sqrt{h_3})}{DP_3}\sqrt{\frac{p_1p_2}{2p_3}}\\
\frac{h^2}{r_3}&=Q_3-\frac{d_3(d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2}-d_3\sqrt{h_3})}{D}\sqrt{\frac{p_1p_2}{2p_3}},
\end{aligned} \tag{87}$$

worin die Quadratwurzelzeichen doppeldeutig zu denken sind.

Setzt man nun zur Abkürzung, unter u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 die Werthe 76), 78), 80) verstanden,

$$\begin{aligned}
(u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2-(r_2+r_3)^2&=2\nabla_1\\
(u_3-u_1)^2+(v_3-v_1)^2-(r_3+r_1)^2&=2\nabla_2\\
(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2-(r_1+r_2)^2&=2\nabla_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2(Q_2Q_3-h^2(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3+\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3+1))&=\mathfrak{D}_1\\
D^2(Q_3Q_1-h^2(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1+1))&=\mathfrak{D}_2\\
D^2(Q_1Q_2-h^2(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2+1))&=\mathfrak{D}_3,
\end{aligned}$$

so ergibt sich

$$2\nabla_1=P_2r_2^2+P_3r_3^2-2(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3+\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3+1)r_2r_3,$$

und mit Hilfe der quadratischen Gleichungen 79), 81) so wie durch Buchstabenverwandlung

$$\begin{aligned}
\nabla_1&=Q_2r_2+Q_3r_3-(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3+\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3+1)r_2r_3-h^2\\
\nabla_2&=Q_3r_3+Q_1r_1-(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1+1)r_3r_1-h^2\\
\nabla_3&=Q_1r_1+Q_2r_2-(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2+1)r_1r_2-h^2\\
\frac{D^2h^2}{r_2r_3}\nabla_1&=\mathfrak{D}_1-D^2\left(\frac{h^2}{r_2}-Q_2\right)\left(\frac{h^2}{r_3}-Q_3\right)\\
\frac{D^2h^2}{r_3r_1}\nabla_2&=\mathfrak{D}_2-D^2\left(\frac{h^2}{r_3}-Q_3\right)\left(\frac{h^2}{r_1}-Q_1\right)\\
\frac{D^2h^2}{r_1r_2}\nabla_3&=\mathfrak{D}_3-D^2\left(\frac{h^2}{r_1}-Q_1\right)\left(\frac{h^2}{r_2}-Q_2\right).
\end{aligned} \tag{88}$$

Damit also die Gleichungen 48) bestehen oder die Ausdrücke ∇_1, ∇_2, ∇_3 verschwinden, ist unter der Voraussetzung, dass h^2 nicht gleich Null ist, nothwendig und hinreichend, dass

$$\mathfrak{D}_1 - D^2\left(\frac{h^2}{r_2} - Q_2\right)\left(\frac{h^2}{r_3} - Q_3\right) = 0$$

$$\mathfrak{D}_2 - D^2\left(\frac{h^2}{r_3} - Q_3\right)\left(\frac{h^2}{r_1} - Q_1\right) = 0$$

$$\mathfrak{D}_3 - D^2\left(\frac{h^2}{r_1} - Q_1\right)\left(\frac{h^2}{r_2} - Q_2\right) = 0$$

sei, welche Bedingungen durch Einsetzung der Ausdrücke 87) die Gestalt

$$\begin{aligned} d_2 d_3 \left(d_1^2 h_1 - (d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})^2\right) \sqrt{\frac{p_3 p_1}{2p_2}} \sqrt{\frac{p_1 p_2}{2p_3}} &= \mathfrak{D}_1 \\ d_3 d_1 \left(d_2^2 h_2 - (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1})^2\right) \sqrt{\frac{p_1 p_2}{2p_3}} \sqrt{\frac{p_2 p_3}{2p_1}} &= \mathfrak{D}_2 \\ d_1 d_2 \left(d_3^2 h_3 - (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2})^2\right) \sqrt{\frac{p_2 p_3}{2p_1}} \sqrt{\frac{p_3 p_1}{2p_2}} &= \mathfrak{D}_3 \end{aligned} \tag{89}$$

annehmen.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{D}_1$ hat man die Identität

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{D}_1 = {} & D^2(Q_2^2 - h^2 P_2) + D^2(Q_3^2 - h^2 P_3) - D^2(Q_2 - Q_3)^2 \\ & + D^2 h^2 (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3)^2 + D^2 h^2 (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_3)^2 - 4D^2 h^2 \end{aligned} \tag{90}$$

und erhält die Bestandtheile der rechten Seite der Reihe nach in folgender Weise.

Nach 85), 86) ist zunächst

$$\begin{aligned} D^2(Q_2^2 - h^2 P_2) + D^2(Q_3^2 - h^2 P_2) = {} & \frac{p_1}{2 p_2 p_3}\left[p_3 d_2 (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2} + d_3 \sqrt{h_3}) - p_2 d_3 (d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})\right]^2 \\ & + p_1 d_2 d_3 \left(d_1^2 h_1 - (d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})^2\right) \\ = {} & p_1 d_2 d_3 \left(d_1^2 h_1 - (d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})^2\right) \\ & + \frac{2p_1}{p_2 p_2} (d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})^2 \left(d_2 d_3 + \sqrt{h_1}(-d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2} + d_3 \sqrt{h_3})\right)^2. \end{aligned} \tag{91}$$

Ferner ist

$$D\,Q_2 = \begin{vmatrix} a_1 - f, & b_1 - g, & h_1 \\ a_2 - f, & b_2 - g, & h_2 + m \\ a_3 - f, & b_3 - g, & h_3 \end{vmatrix}$$

$$D\,Q_3 = \begin{vmatrix} a_1 - f, & b_1 - g, & h_1 \\ a_2 - f, & b_2 - g, & h_2 \\ a_3 - f, & b_3 - g, & h_3 + n \end{vmatrix}$$

und daher

$$D(Q_2 - Q_3) = \begin{vmatrix} a_1 - f, & b_1 - g, & 0 \\ a_2 - f, & b_2 - g, & m \\ a_3 - f, & b_3 - g, & -n \end{vmatrix}$$

$$= -m \begin{vmatrix} a_1 - f, & b_1 - g \\ a_3 - f, & b_3 - g \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} a_1 - f, & b_1 - g \\ a_2 - f, & b_2 - g \end{vmatrix},$$

sowie durch zeilenweise Multiplication auf Grund der Gleichungen 73)

$$D^2(Q_2-Q_3)^2 = m^2 \begin{vmatrix} h^2+h_1^2, & h^2+\frac{1}{2}(h_1^2+h_3^2-b^2) \\ h^2+\frac{1}{2}(h_1^2+h_3^2-b^2), & h^2+h_3^2 \end{vmatrix} + n^2 \begin{vmatrix} h^2+h_1^2, & h^2+\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2-c^2) \\ h^2+\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2-c^2), & h^2+h_2^2 \end{vmatrix} + 2mn \begin{vmatrix} h^2+h_1^2, & h^2+\frac{1}{2}(h_1^2+h_3^2-b^2) \\ h^2+\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2-c^2), & h^2+\frac{1}{2}(h_2^2+h_3^2-a^2) \end{vmatrix}.$$

Da aber

$$\frac{1}{4}(h_1^2+h_3^2-b^2)^2-h_1^2h_3^2 = \frac{1}{4}p_2 d_2^2(d_2-2\sqrt{h_1}\sqrt{h_3})$$

$$\frac{1}{4}(h_1^2+h_2^2-c^2)^2-h_1^2h_2^2 = \frac{1}{4}p_3 d_3^2(d_3-2\sqrt{h_1}\sqrt{h_2})$$

$$\frac{1}{4}(h_1^2+h_3^2-b^2)(h_1^2+h_2^2-c^2)-\frac{1}{2}h_1^2(h_2^2+h_3^2-a^2) = \frac{1}{4}d_2^2d_3^2-\frac{1}{2}h_1(-d_1^2h_1+d_2^2h_2+d_3^2h_3)$$

ist, so ergibt sich durch Entwicklung der Determinanten

$$\begin{aligned} D^2(Q_2-Q_3)^2 &= [m^2b^2+n^2c^2+mn(b^2+c^2-a^2)]\,h^2 \\ &-\frac{1}{4}m^2p_2d_2^2(d_2-2\sqrt{h_1}\sqrt{h_3})-\frac{1}{4}n^2p_3d_3^2(d_3-2\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}) \\ &-mn\left(\frac{1}{2}d_2^2d_3^2-h_1(-d_1^2h_1+d_2^2h_2+d_3^2h_3)\right). \end{aligned} \tag{92}$$

Aus den Gleichungen 82), 83) folgt durch Subtraction

$$\begin{aligned} a_1(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3)+b_1(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{B}_3)+\mathfrak{C}_2-\mathfrak{C}_3 &= 0 \\ a_2(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3)+b_2(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{B}_3)+\mathfrak{C}_2-\mathfrak{C}_3 &= m \\ a_3(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3)+b_3(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{B}_3)+\mathfrak{C}_2-\mathfrak{C}_3 &= -n, \end{aligned}$$

und, indem man diese Gleichungen auflöst,

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3) &= (b_3-b_1)\,m+(b_2-b_1)\,n \\ -D(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{B}_3) &= (a_3-a_1)\,m+(a_2-a_1)\,n \\ D^2(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3)^2+D^2(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{B}_3)^2 &= m^2b^2+n^2c^2+(b^2+c^2-a^2)\,mn. \end{aligned} \tag{93}$$

Der Ausdruck für das Halbmesserquadrat h^2 wird einfach durch zeilenweise Multiplication der beiden Determinanten

$$Dh^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ a_1-f, & b_1-g, & -h^2, & -h_1 \\ a_2-f, & b_2-g, & -h^2, & -h_2 \\ a_3-f, & b_3-g, & -h^2, & -h_3 \end{vmatrix}$$

$$D = -\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ a_1-f, & b_1-g, & 1, & h_1 \\ a_2-f, & b_2-g, & 1, & h_2 \\ a_3-f, & b_3-g, & 1, & h_3 \end{vmatrix}$$

erhalten. Es wird nämlich unter Berücksichtigung der Gleichungen 73)

$$D^2 h^2 = -\begin{vmatrix} 1, & -h_1, & -h_2, & -h_3 \\ h_1, & 0, & -\frac{1}{2}d_3^2, & -\frac{1}{2}d_2^2 \\ h_2, & -\frac{1}{2}d_3^2, & 0, & -\frac{1}{2}d_1^2 \\ h_3, & -\frac{1}{2}d_2^2, & -\frac{1}{2}d_1^2, & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4D^2 h^2 = & \, d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_1^4 h_1^2 + d_2^4 h_2^2 + d_3^4 h_3^2 \\ & -2d_2^2 d_3^2 h_2 h_3 - 2d_3^2 d_1^2 h_3 h_1 - 2d_1^2 d_2^2 h_1 h_2. \end{aligned} \tag{94}$$

Setzt man aus den Gleichungen 91), 92), 93), 94) die rechte Seite der Gleichung 90) zusammen, so wird

$$2\mathfrak{D}_1 = p_1 d_2 d_3 \left(d_1^2 h_1 - (d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})^2\right) + \frac{H}{p_2 p_3},$$

wo H zur Abkürzung den Ausdruck

$$\begin{aligned} & 2p_1 (d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})^2 \left(d_2 d_3 + \sqrt{h_1}\left(-d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2} + d_3 \sqrt{h_3}\right)\right)^2 \\ & + \frac{1}{4} m^2 p_2^2 p_3 d_2^2 (d_2 - 2\sqrt{h_1}\sqrt{h_3}) + \frac{1}{4} n^2 p_2 p_3^2 d_3^2 (d_3 - 2\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}) \\ & + mn \left(\frac{1}{2} d_2^2 d_3^2 - h_1 (-d_1^2 h_1 + d_2^2 h_2 + d_3^2 h_3)\right) p_2 p_3 \\ & - p_2 p_3 (d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_1^4 h_1^2 + d_2^4 h_2^2 + d_3^4 h_3^2) \\ & + 2p_2 p_3 (d_2^2 d_3^2 h_2 h_3 + d_3^2 d_1^2 h_3 h_1 + d_1^2 d_2^2 h_1 h_2) \end{aligned}$$

bezeichnet. Von diesem Ausdruck ist es leicht, ohne denselben zu entwickeln, zu zeigen, dass er identisch gleich Null ist. Man setze nämlich für einen Augenblick in demselben

$$d_1 \sqrt{h_1} = 2\alpha \qquad d_2 \sqrt{h_2} = 2\beta \qquad d_3 \sqrt{h_3} = 2\gamma$$

$$\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}\sqrt{h_3} = t.$$

Es geht dann H ohne jede weitere Entwicklung, wenn man sich an die Bedeutungen 67) 70) der Zeichen p_1, p_2, p_3, l, m, n erinnert, von dem Factor $\frac{64}{h_1 h_2 h_3 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3}}$ abgesehen, über in

$$\begin{aligned} & t(t+\alpha)(\beta-\gamma)^2 \left(2\beta\gamma + t(-\alpha+\beta+\gamma)\right)^2 \\ & + \beta^2 (t+\gamma)(\beta - t)\left[(t+\alpha)(t+\gamma) - t(t+\beta)\right]^2 + \gamma^2 (t+\beta)(\gamma - t)\left[(t+\alpha)(t+\beta) - t(t+\gamma)\right]^2 \\ & + \left[(t+\alpha)(t+\gamma) - t(t+\beta)\right]\left[(t+\alpha)(t+\beta) - t(t+\gamma)\right]\left(2\beta^2\gamma^2 - t^2(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\right) \\ & - (t+\beta)(t+\gamma)\left(4\alpha^2\beta^2\gamma^2 + t^2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2 - 2\alpha^2\beta^2)\right). \end{aligned}$$

Da der Coëfficient von t^4 in dem vorstehenden Ausdrucke, nämlich

$$\begin{aligned} & (\beta-\gamma)^2(\beta+\gamma-\alpha)^2 - \beta^2(\alpha-\beta+\gamma)^2 - \gamma^2(\alpha+\beta-\gamma)^2 - (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\left(\alpha^2 - (\beta^2-\gamma^2)\right) \\ & - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 + 2\alpha^2\beta^2 \end{aligned}$$

gleich Null ist, so ist dieser Ausdruck eine ganze Function dritten Grades von t und es ist leicht festzustellen, dass derselbe verschwindet, wenn statt t einer der Werthe

$$0, \quad -\alpha, \quad -\beta, \quad -\gamma$$

gesetzt wird. Derselbe muss also identisch verschwinden und man hat

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{2} p_1 d_2 d_3 \left(d_1^2 h_1 - (d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3})^2\right),$$

sowie durch Buchstabenvertauschung

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{1}{2} p_2 d_3 d_1 \left(d_2^2 h_2 - (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1})^2\right)$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{1}{2} p_3 d_1 d_2 \left(d_3^2 h_3 - (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2})^2\right).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in 89) findet man als nothwendige und hinreichende Bedingungen des Bestehens der Gleichungen 48)

$$\sqrt{\frac{p_3 p_1}{2 p_2}} \sqrt{\frac{p_1 p_2}{2 p_3}} = \frac{1}{2} p_1$$

$$\sqrt{\frac{p_1 p_2}{2 p_3}} \sqrt{\frac{p_2 p_3}{2 p_1}} = \frac{1}{2} p_2$$

$$\sqrt{\frac{p_2 p_3}{2 p_1}} \sqrt{\frac{p_3 p_1}{2 p_2}} = \frac{1}{2} p_3,$$

welche erfüllt werden, wenn man

$$\sqrt{\frac{p_2 p_3}{2 p_1}} = \frac{1}{p_1} \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3}$$

$$\sqrt{\frac{p_3 p_1}{2 p_2}} = \frac{1}{p_2} \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3}$$

$$\sqrt{\frac{p_1 p_2}{2 p_3}} = \frac{1}{p_3} \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3}$$

setzt und unter $\sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3}$ überall denselben Werth versteht, so dass für die Halbmesser der gesuchten Kreise eine der folgenden Formelgruppen gilt:

$$\left.\begin{aligned}
D P_1 r_1 &= D Q_1 + \frac{d_1}{p_1}(-d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2} + d_3 \sqrt{h_3}) \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3} \\
D P_2 r_2 &= D Q_2 + \frac{d_2}{p_2} (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2} + d_3 \sqrt{h_3}) \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3} \\
D P_3 r_3 &= D Q_3 + \frac{d_3}{p_3} (d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3}) \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3} \\
D P_1 r_1 &= D Q_1 - \frac{d_1}{p_1}(-d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2} + d_3 \sqrt{h_3}) \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3} \\
D P_2 r_2 &= D Q_2 - \frac{d_2}{p_2} (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2} + d_3 \sqrt{h_3}) \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3} \\
D P_3 r_3 &= D Q_3 - \frac{d_3}{p_3} (d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2} - d_3 \sqrt{h_3}) \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 p_3}
\end{aligned}\right\} \quad 95)$$

Wenn $h^2 = 0$ ist oder die gegebenen Kreise K_1, K_2, K_3 sich in einem Punkte schneiden, so haben die quadratischen Gleichungen 77), 79), 81) je eine verschwindende Wurzel, welche drei Wurzeln auf Grund der

Gleichungen 88) einander zuzuordnen sind, und es ist leicht aus dem allgemeinen Fall zu schliessen, dass die andern drei Wurzeln

$$\frac{2Q_1}{P_1},\quad \frac{2Q_2}{P_2},\quad \frac{2Q_3}{P_3}$$

den Gleichungen 48) Genüge leisten.

Aus den Formeln 95) folgt leicht, dass die Anzahl sämmtlicher Auflösungen der Gleichungen 47), 48), wenn auch negative Werthe der Halbmesser h_1, h_2, h_3 zugelassen werden, im Allgemeinen 64 beträgt.

7.

Plücker[1] geht behufs Auflösung der in den Abschnitten 5 und 6 behandelten Aufgabe von drei sich von aussen berührenden Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ aus, construirt drei Kreise K_1, K_2, K_3 von gleichen Halbmessern, von denen K_1 die Kreise $(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$, K_2 die Kreise $(\mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_1)$ und K_3 die Kreise $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ von aussen berührt, zieht die drei gemeinschaftlichen inneren Tangenten der Kreispaare $(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$, $(\mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_1)$, $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, beschreibt drei Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, von denen der erste den Kreis K_1 von aussen und die gemeinschaftlichen inneren Tangenten der Kreispaare $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_3)$ auf der entgegengesetzten Seite wie $\mathfrak{K}_1$ berührt und die beiden anderen eine ähnliche Lage in Bezug auf K_2 und K_3 haben, und behauptet, dass die Potenzlinien (Chordalen nach seiner Benennung) je zweier der Kreise K_1, K_2, K_3 gemeinschaftliche innere Tangenten der Kreispaare $(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3)$, $(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_1)$, $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ sind.

Um diese Behauptung, welche Plücker ohne Beweis aufstellt, zu prüfen, seien

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1 &= (x-u_1)^2+(y-v_1)^2-r_1^2=0\\
\mathfrak{K}_2 &= (x-u_2)^2+(y-v_2)^2-r_2^2=0\\
\mathfrak{K}_3 &= (x-u_3)^2+(y-v_3)^2-r_3^2=0\\
K_1 &= (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-h_1^2=0\\
K_2 &= (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-h_2^2=0\\
K_3 &= (x-a_3)^2+(y-b_3)^2-h_3^2=0\\
\mathfrak{H}_1 &= (x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-\rho_1^2=0\\
\mathfrak{H}_2 &= (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-\rho_2^2=0\\
\mathfrak{H}_3 &= (x-\alpha_3)^2+(y-\beta_3)^2-\rho_3^2=0
\end{aligned}$$

die Gleichungen der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, K_1, K_2, K_3 und der Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$. Es finden dann ausser den Gleichungen 47), 48) noch neun Gleichungen für die Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ statt, von denen nur die auf den ersten derselben sich beziehenden hergesetzt werden sollen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1(\alpha_1, \beta_1)-\mathfrak{K}_2(\alpha_1, \beta_1) &= 2\rho_1(r_1+r_2)\\
\mathfrak{K}_1(\alpha_1, \beta_1)-\mathfrak{K}_3(\alpha_1, \beta_1) &= 2\rho_1(r_1+r_3)
\end{aligned} \tag{96}$$

$$K_1(\alpha_1, \beta_1) = 2\rho_1 h_1+\rho_1^2. \tag{97}$$

Bezeichnen r, u, v den Halbmesser und die Mittelpunktscoordinaten des Kreises, welcher die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ senkrecht schneidet, so dass also

$$\mathfrak{K}_1(u, v) = \mathfrak{K}_2(u, v) = \mathfrak{K}_3(u, v) = r^2 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1+r_2+r_3}$$

ist und werden die Bezeichnungen der Abschnitte 5 und 6 beibehalten, so kann man in dem vorliegenden Falle immer Δ, $\sqrt{h_1}$, $\sqrt{h_2}$, $\sqrt{h_3}$ positiv voraussetzen, und wenn man annimmt, dass die Kreise K_1, K_2, K_3 unter

[1] Analytisch-geometrische Aphorismen, VI, 2, im 11. Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik.

den zwei möglichen Lagen eines jeden diejenige haben, in Bezug auf welche die Potenz des Punktes (u, v) (für diese Kreise) die grössere ist, so müssen auch Δ_1, Δ_2, Δ_3 positiv sein. Man erhält nämlich die Potenz des Punktes (u, v) in Bezug auf den Kreis K_1, wenn man in der Identität 55)

$$x = u \qquad y = v$$

setzt. Hiedurch entspringt

$$K_1(u, v) = r^2 + \frac{2D}{(r_2+r_3)^2}\begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} + \frac{4h_1 r_2 r_3}{r_2+r_3},$$

und da nach 37)

$$\begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \frac{2r_1 r_2 r_3 (r_2+r_3)}{\Delta}$$

ist, so wird

$$K_1(u, v) = r^2 + \frac{4h_1 r_2 r_3}{r_2+r_3} + \frac{4r_1 r_2 r_3}{(r_2+r_3)}\frac{\Delta_1\sqrt{h_1}}{\Delta}, \tag{98}$$

und man sieht, dass der grössere Werth der Potenz $K(u, v)$ dem positiven Werthe von Δ_1 entspricht. Gleicherweise muss man Δ_2, Δ_3 positiv annehmen, damit, wie es die Plücker'sche Figur erheischt, $K_2(u, v)$, $K_3(u, v)$ grösser ausfallen, als für die zweiten möglichen Lagen der Kreise K_2, K_3.

Überdies ist unmittelbar ersichtlich, dass φ, ψ, χ in den Formeln 66) diejenigen Winkel sind, welche die von dem Mittelpunkte des Kreises $\mathfrak{K}_1$ nach den Mittelpunkten der Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$, K_2 und $\mathfrak{K}_3$, K_3 und $\mathfrak{K}_2$ gezogenen Halbmesser bezüglich mit einander bilden, und dass also für die Längen a, b, c, der Seiten des von den Mittelpunkten der Kreise K_1, K_2, K_3 gebildeten Dreiecks nach 68) folgende Formeln gelten:

$$\begin{aligned} a &= 2\sqrt{r_1+h_2}\sqrt{r_1+h_3}\sin\frac{\varphi+\psi+\chi}{2} \\ &= -2\sqrt{h_2}\sqrt{h_3} + \frac{1}{2r_2 r_3}\left(\frac{\Delta\sqrt{h_2}+r_2\Delta_2}{r_3+r_1}\right)\left(\frac{\Delta\sqrt{h_3}+r_3\Delta_3}{r_1+r_2}\right) \\ b &= -2\sqrt{h_3}\sqrt{h_1} + \frac{1}{2r_3 r_1}\left(\frac{\Delta\sqrt{h_3}+r_3\Delta_3}{r_1+r_2}\right)\left(\frac{\Delta\sqrt{h_1}+r_1\Delta_1}{r_2+r_3}\right) \\ c &= -2\sqrt{h_1}\sqrt{h_2} + \frac{1}{2r_1 r_2}\left(\frac{\Delta\sqrt{h_1}+r_1\Delta_1}{r_2+r_3}\right)\left(\frac{\Delta\sqrt{h_2}+r_2\Delta_2}{r_3+r_1}\right). \end{aligned} \tag{99}$$

Setzt man daher

$$h_1 = h_2 = h_3 = d$$

und zur Abkürzung

$$r_1 + r_2 + r_3 = s$$

$$\frac{\sqrt{ds} + \sqrt{r_1(d+r_2+r_3)}}{r_2+r_3} = q_1$$

$$\frac{\sqrt{ds} + \sqrt{r_2(d+r_3+r_1)}}{r_3+r_1} = q_2$$

$$\frac{\sqrt{ds} + \sqrt{r_3(d+r_1+r_2)}}{r_1+r_2} = q_3,$$

so hat man in Folge der aus 60), 54), 58), 59) entspringenden Gleichungen

$$\Delta = 2\sqrt{s r_1 r_2 r_3}$$

$$\Delta_1 = 2\sqrt{r_2 r_3 (d+r_2+r_3)}$$
$$\Delta_2 = 2\sqrt{r_3 r_1 (d+r_3+r_1)}$$
$$\Delta_3 = 2\sqrt{r_1 r_2 (d+r_1+r_2)},$$

nach 98), 61), 99) die Formeln

$$K_1(u, v) - r^2 = 4 r_2 r_3 q_1 \sqrt{\frac{d}{s}}$$
$$K_2(u, v) - r^2 = 4 r_3 r_1 q_2 \sqrt{\frac{d}{s}} \qquad 100)$$
$$K_3(u, v) - r^2 = 4 r_1 r_2 q_3 \sqrt{\frac{d}{s}}$$

$$K_1(u_1, v_1) - r_1^2 + 2dr_1 = 4 r_2 r_3 q_1^2 \qquad 101)$$

$$a = -2d + 2r_1 q_2 q_3$$
$$b = -2d + 2r_2 q_3 q_1 \qquad 102)$$
$$c = -2d + 2r_3 q_1 q_2.$$

Dies vorausgeschickt, genügt man den Gleichungen 96) durch die Werthe

$$\alpha_1 = u_1 + \left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)(u - u_1) \qquad \beta_1 = v_1 + \left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)(v - v_1), \qquad 103)$$

durch deren Einsetzung in die Gleichung 97) für ρ_1 die quadratische Gleichung

$$r^2\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 + \left(K_1(u, v) - r^2 - (K_1(u_1, v_1) - r_1^2 + 2dr_1)\right)\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)$$
$$+ K_1(u_1, v_1) - r_1^2 + 2dr_1 = 0,$$

oder in einfacherer Gestalt nach 100), 101)

$$\frac{r_1}{s}\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 - 4q_1\left(q_1 - \sqrt{\frac{d}{s}}\right)\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right) + 4q_1^2 = 0 \qquad 104)$$

hervorgeht, welche wegen der Identität

$$\left(q_1 - \sqrt{\frac{d}{s}}\right)^2 - \frac{r_1}{s} = \frac{r_1}{s} q_1^2$$

immer reelle und überdies positive Wurzeln hat.

Die Gleichungen der Potenzlinien der Kreispaare (K_1, K_2), (K_1, K_3) sind

$$K_2 - K_1 = 0 \qquad K_3 - K_1 = 0.$$

Um daher zu untersuchen, ob diese Geraden von dem Kreise $\mathfrak{H}_1$ berührt werden, hat man die Ausdrücke

$$K_2(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1), \quad K_3(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1)$$

zu bestimmen. Da dieselben linear sind, so hat man nach 103)

$$K_2(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1) = \left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)\left(K_2(u, v) - K_1(u, v)\right) - \frac{\rho_1}{r_1}\left(K_2(u_1, v_1) - K_1(u_1, v_1)\right)$$

und nach 100), 47), 101)

$$= 4 r_3 (r_1 q_2 - r_2 q_1)\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)\sqrt{\frac{d}{s}}$$

$$+ 4 r_2 r_3 q_1^2 \frac{\rho_1}{r_1} - 4 d \rho_1.$$

Zieht man

$$2 c \rho_1 = \rho_1 (-4d + 4 r_3 q_1 q_2)$$

ab, so entsteht

$$K_2(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1) - 2 c \rho_1 = 4 r_3 (r_1 q_2 - r_2 p_1)\left[\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)\left(\sqrt{\frac{d}{s}} - q_1\right) + q_1\right].$$

Mit Hilfe der quadratischen Gleichung 104) ergibt sich eine weitere Vereinfachung, so dass

$$K_2(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1) - 2 c \rho_1 = \frac{r_1 r_3}{s q_1}(r_2 q_1 - r_1 q_2)\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)^2$$

und nach 102)

$$= \frac{r^2}{b + 2d}\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 (b - a)$$

wird. Ebenso würde man

$$K_3(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1) - 2 b \rho_1 = \frac{r^2}{c + 2d}\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 (c - a)$$

finden.

Aus den Gleichungen

$$K_2(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1) = 2 c \rho_1 + \frac{r^2}{b + 2d}\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 (b - a)$$

$$K_3(\alpha_1, \beta_1) - K_1(\alpha_1, \beta_1) = 2 b \rho_1 + \frac{r^2}{c + 2d}\left(1 + \frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 (c - a)$$

$$K_3(\alpha_2, \beta_2) - K_2(\alpha_2, \beta_2) = 2 a \rho_2 + \frac{r^2}{c + 2d}\left(1 + \frac{\rho_2}{r_2}\right)^2 (c - b)$$

$$K_1(\alpha_2, \beta_2) - K_2(\alpha_2, \beta_2) = 2 c \rho_2 + \frac{r^2}{a + 2d}\left(1 + \frac{\rho_2}{r_2}\right)^2 (a - b)$$

$$K_1(\alpha_3, \beta_3) - K_3(\alpha_3, \beta_3) = 2 b \rho_3 + \frac{r^2}{a + 2d}\left(1 + \frac{\rho_3}{r_3}\right)^2 (a - c)$$

$$K_2(\alpha_3, \beta_3) - K_3(\alpha_3, \beta_3) = 2 a \rho_3 + \frac{r^2}{b + 2d}\left(1 + \frac{\rho_3}{r_3}\right)^2 (b - c)$$

folgt nun, dass die Behauptung Plücker's nur in dem sehr besonderen Falle zutrifft, wo das von den Mittelpunkten der Kreise K_1, K_2, K_3 gebildete Dreieck gleichseitig ist. Sind nämlich a, b, c nicht alle einander gleich und etwa $a > b$, so wäre in Folge der vorstehenden Gleichungen

$$K_1(\alpha_2, \beta_2) - K_2(\alpha_2, \beta_2) > 2 c \rho_2,$$

wogegen die Berührung des Kreises $\mathfrak{H}_2$ mit der Potenzlinie der Kreise K_1, K_2 die Bedingung

$$K_1(\alpha_2, \beta_2) - K_2(\alpha_2, \beta_2) = \pm 2 c \rho_2$$

erheischt.

Die Construction, welche Plücker, auf die obige Behauptung gestützt, für das auf drei Kreise von gleichen Halbmessern bezügliche Problem entwickelt, sowie auch die aus derselben durch Umgestaltung mittelst verkehrter Leitstrahlen hergeleitete Lösung der allgemeinen Aufgabe sind daher im Allgemeinen unrichtig.

8.

Es seien

$$\mathfrak{K}_1 = (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 - r_1^2 = 0$$
$$\mathfrak{K}_2 = (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 - r_2^2 = 0$$
$$\mathfrak{K}_3 = (x-u_3)^2 + (y-v_3)^2 - r_3^2 = 0$$

die Gleichungen dreier Kreise, welche irgend einer der 64 Lösungen der Gleichungen 47) und 48) entsprechen, und

$$\mathfrak{K} = (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung des Kreises, welcher jene senkrecht schneidet, so dass

$$\mathfrak{K}_1(u, v) = \mathfrak{K}_2(u, v) = \mathfrak{K}_3(u, v) = r^2$$

ist. Es soll unter Beibehaltung der Bezeichnungen der Abschnitte 5 und 6 und in der Voraussetzung, dass keiner der Halbmesser h_1, h_2, h_3 gleich Null ist, untersucht werden, ob es, wie die Steiner'sche Construction[1] verlangt, drei Kreise Q_1, Q_2, Q_3 (welche auch zum Theil oder ganz in Gerade ausarten können), gibt, welche bezüglich die Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_3$ und $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in deren Berührungspunkten berühren, durch dieselben zwei (reellen oder imaginären) Punkte gehen und überdies die Eigenschaft besitzen, dass drei Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, welche bezüglich die in den Gruppen

$$K_1,\ Q_2,\ Q_3$$
$$K_2,\ Q_3,\ Q_1$$
$$K_3,\ Q_1,\ Q_2$$

enthaltenen Kreise berühren, auch je einen Potenzkreis der Kreispaare

$$(K_1,\ K_2)\ (K_1,\ K_3)$$
$$(K_2,\ K_3)\ (K_2,\ K_1)$$
$$(K_3,\ K_1)\ (K_3,\ K_2)$$

beziehungsweise berühren. Dass solche drei Kreise in der That in dem Falle, wo die drei gegebenen Kreise K_1, K_2, K_3 sich in einem Punkte schneiden, existiren, geht unmittelbar aus der Umgestaltung der Figur, welche durch die Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe für das geradlinige Dreieck mit Hilfe der Steiner'schen Construction entsteht, mittelst verkehrter Leitstrahlen hervor. Unter den Potenzkreisen zweier Kreise sollen allgemein diejenigen zwei Kreise verstanden werden, welche durch die (reellen oder imaginären) Durchschnittspunkte jener gehen und die beiden Ähnlichkeitspunkte (den äusseren und inneren) zu Mittelpunkten haben.

Bezeichnet

$$G = 0$$

die Gleichung der Geraden, in welcher die Mittelpunkte der Kreise Q_1, Q_2, Q_3 liegen sollen, so sind die Gleichungen der Kreise (eventuell Geraden) Q_1, Q_2, Q_3

$$G''\,\mathfrak{K}_3 - G'''\,\mathfrak{K}_2 = 0$$
$$G'''\,\mathfrak{K}_1 - G'\,\mathfrak{K}_3 = 0$$
$$G'\,\mathfrak{K}_2 - G''\,\mathfrak{K}_1 = 0,$$

[1] Einige geometrische Betrachtungen (15) im 1. Bande des Crelle'schen Journals.

wo zur Abkürzung

$$G(u_1, v_1) = G' \qquad G(u_2, v_2) = G'' \qquad G(u_3, v_3) = G'''$$

gesetzt worden ist. Es seien ferner

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_1 &= (x-\mathfrak{a}_1)^2 + (y-\mathfrak{b}_1)^2 - \mathfrak{h}_1^2 = 0 \\ \mathfrak{H}_2 &= (x-\mathfrak{a}_2)^2 + (y-\mathfrak{b}_2)^2 - \mathfrak{h}_2^2 = 0 \\ \mathfrak{H}_3 &= (x-\mathfrak{a}_3)^2 + (y-\mathfrak{b}_3)^2 - \mathfrak{h}_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{105}$$

die Gleichungen dreier Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, von welchen der erste die Kreise K_1, Q_2, Q_3 nach Massgabe der Gleichungen

$$\begin{aligned} G''\,\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - G'\,\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= (G''-G')\,\mathfrak{h}_1^2 + 2(G''r_1 + G'r_2)\,\mathfrak{h}_1 \\ G'''\,\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - G'\,\mathfrak{K}_3(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= (G'''-G')\,\mathfrak{h}_1^2 + 2(G'''r_1 + G'r_3)\,\mathfrak{h}_1 \end{aligned} \tag{106}$$

$$K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{h}_1^2 + 2h_1\mathfrak{h}_1 \tag{107}$$

berührt, während für die übrigen ähnliche durch Buchstabenvertauschung herzuleitende Gleichungen gelten.

Da sich die Gleichungen 106) auch in der Gestalt

$$\begin{aligned} G'\left(\mathfrak{H}_1(u_2, v_2) - r_2^2 + 2r_2\mathfrak{h}_1\right) &= G''\left(\mathfrak{H}_1(u_1, v_1) - r_1^2 - 2r_1\mathfrak{h}_1\right) \\ G'\left(\mathfrak{H}_1(u_3, v_3) - r_3^2 + 2r_3\mathfrak{h}_1\right) &= G'''\left(\mathfrak{H}_1(u_1, v_1) - r_1^2 - 2r_1\mathfrak{h}_1\right) \end{aligned}$$

schreiben lassen, so schliesst man aus denselben

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_1(u_1, v_1) &= r_1^2 + 2r_1\mathfrak{h}_1 + \varepsilon G' \\ \mathfrak{H}_1(u_2, v_2) &= r_2^2 - 2r_2\mathfrak{h}_1 + \varepsilon G'' \\ \mathfrak{H}_1(u_3, v_3) &= r_3^2 - 2r_3\mathfrak{h}_1 + \varepsilon G'''. \end{aligned} \tag{108}$$

Wird nun

$$\mathfrak{H}_1(x, y) - \mathfrak{K}(x, y) - \varepsilon G(x, y) = F(x, y)$$

gesetzt, wo F in Bezug auf x, y vom ersten Grade sein wird, so ist in Folge der Gleichungen 108)

$$\begin{aligned} F(u_1, v_1) &= 2r_1\mathfrak{h}_1 \\ F(u_2, v_2) &= -2r_2\mathfrak{h}_1 \\ F(u_3, v_3) &= -2r_3\mathfrak{h}_1, \end{aligned}$$

und daher identisch

$$F(x, y) = \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_1)$$

$$\mathfrak{H}_1(x, y) = \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)\mathfrak{K} - \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\mathfrak{K}_1 + \varepsilon G. \tag{109}$$

Zur Bestimmung von ε nehme man in dieser Identität

$$x = a_1 \qquad y = b_1;$$

es wird dann, da nach 107)

$$\mathfrak{H}_1(a_1, b_1) = 2h_1\mathfrak{h}_1 + h_1^2$$

ist,

$$\begin{aligned} 2h_1\mathfrak{h}_1 + h_1^2 &= \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)\mathfrak{K}(a_1, b_1) - \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\mathfrak{K}_1(a_1, b_1) + \varepsilon G(a_1, b_1) \\ &= \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)(K_1(u, v) - r^2 + h_1^2) - \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}(K_1(u_1, v_1) - r_1^2 + h_1^2) + \varepsilon G(a_1, b_1) \end{aligned} \tag{110}$$

$$-\varepsilon G(a_1, b_1) = \left(1 + \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)(K_1(u, v) - r^2) - \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}(K_1(u_1, v_1) - r_1^2 + 2h_1r_1)$$

Nach der Bestimmung von ε lässt sich der Halbmesser $\mathfrak{h}_1$ aus der Gleichung 109) herleiten. Man erhält für denselben eine quadratische Gleichung, so dass es also zwei Kreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_1'$ gibt, welche den Gleichungen 106), 107) genügen.

Es bleibt nun zu untersuchen, ob bei gehöriger Wahl der Geraden G einer der Hilfskreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_1'$ die Potenzkreise

$$h_1 K_2 - h_2 K_1 = 0 \qquad h_1 K_3 - h_3 K_1 = 0 \tag{111}$$

berührt. Es ist auf Grund der Identität 109)

$$\begin{aligned} K_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= \mathfrak{H}_1(a_2, b_2) + \mathfrak{h}_1^2 - h_2^2 \\ &= \left(1+\frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)\mathfrak{K}(a_2, b_2) - \frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\mathfrak{K}_1(a_2, b_2) + \varepsilon G(a_2, b_2) + \mathfrak{h}_1^2 - h_2^2 \\ &= \mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1 h_2 + \left(1+\frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right)(K_2(u, v) - r^2) + \varepsilon G(a_2, b_2). \end{aligned}$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\begin{aligned} K_1(u, v) - r^2 &= n_1 \\ K_2(u, v) - r^2 &= n_2 \\ K_1(u_1, v_1) - r_1^2 + 2 r_1 h_1 &= m_1, \end{aligned}$$

so wird

$$K_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1 h_2 + n_2\left(1+\frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right) + \varepsilon G(a_2, b_2)$$

und mit Hilfe von 107)

$$h_1 K_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - h_2 K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = (h_1 - h_2)\mathfrak{h}_1^2 - 4 h_1 h_2 \mathfrak{h}_1 + h_1 n_2\left(1+\frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right) + h_1 \varepsilon G(a_2, b_2).$$

Da aber nach 98), 61)

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{4 r_2 r_3 \sqrt{h_1}}{\Delta}\left(\frac{r_1\Delta_1 + \Delta\sqrt{h_1}}{r_2 + r_3}\right) \\ n_2 &= \frac{4 r_3 r_1 \sqrt{h_2}}{\Delta}\left(\frac{r_2\Delta_2 + \Delta\sqrt{h_2}}{r_3 + r_1}\right) \\ m_1 &= \frac{1}{r_1}\left(\frac{r_1\Delta_1 + \Delta\sqrt{h_1}}{r_2 + r_3}\right)^2, \end{aligned}$$

und demgemäss nach 68)

$$2\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}\, d_3 = -4 h_1 h_2 + \frac{h_1 m_1 n_2}{r_1 n_1}$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} h_1 K_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - h_2 K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - (h_1 - h_2)\mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}\, d_3 \\ = \frac{h_1 n_2}{n_1}\left[n_1\left(1+\frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right) - m_1\frac{\mathfrak{h}_1}{r_1}\right] + h_1 \varepsilon G(a_2, b_2) \end{aligned}$$

und nach 110)

$$= \frac{h_1 \varepsilon}{n_1}(n_1 G(a_2, b_2) - n_2 G(a_1, b_1));$$

ebenso

$$h_1 K_3(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - h_3 K(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - (h_1 - h_3)\mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1\sqrt{h_1}\sqrt{h_3}\, d_2 = \frac{h_1\varepsilon}{n_1}(n_1 G(a_3, b_3) - n_3 G(a_1, b_1)).$$

Wählt man also die Gerade G so, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} G(a_1, b_1) &= n_1 \\ G(a_2, b_2) &= n_2 \\ G(a_3, b_3) &= n_3 \end{aligned} \tag{112}$$

stattfinden, so wird

$$h_1 K_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - h_2 K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = (h_1 - h_2)\mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2}$$

$$h_1 K_3(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - h_3 K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = (h_1 - h_3)\mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 d_2 \sqrt{h_1}\sqrt{h_3}.$$

Diese Gleichungen drücken aber aus, dass die Kreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_1'$ die Potenzkreise 111) berühren; denn stellt die Gleichung

$$h_1 K_2 - h_2 K_1 = 0$$

einen Kreis dar, so ist dessen Halbmesser (vom Zeichen abgesehen)

$$= \frac{d_3\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}}{h_1 - h_2};$$

in dem Falle hingegen, wo $h_1 = h_2$ ist, oder diese Gleichung einer Geraden entspricht, ist die Summe der Quadrate der Coëfficienten von x, y

$$= 4 h_1 h_2 d_3^2.$$

Die Gleichungen 112) drücken aber auch die hinreichenden Bedingungen dafür aus, dass die Hilfskreise $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3$, $\mathfrak{H}_3'$ bezüglich die Potenzkreise

$$h_2 K_3 - h_3 K_2 = 0 \qquad h_2 K_1 - h_1 K_2 = 0$$

$$h_3 K_1 - h_1 K_3 = 0 \qquad h_3 K_2 - h_2 K_3 = 0$$

berühren.

Beachtet man, dass

$$n_1 = \mathfrak{K}(a_1, b_1) - h_1^2 \text{ u. s. w.}$$

ist, so lassen sich die Gleichungen 112) auf die Form

$$\mathfrak{K}(a_1, b_1) - G(a_1, b_1) = h_1^2$$

$$\mathfrak{K}(a_2, b_2) - G(a_2, b_2) = h_2^2$$

$$\mathfrak{K}(a_3, b_3) - G(a_3, b_3) = h_3^2$$

bringen, aus welcher sofort

$$\mathfrak{K}(x, y) - G(x, y) = K(x, y)$$

$$G = \mathfrak{K} - K$$

folgt, wo K dieselbe Bedeutung, wie in 72) hat. Hienach ist G die Potenzlinie der beiden Lothkreise $\mathfrak{K}$, K.

Die Coordinaten (ξ, η) des Berührungspunktes des Kreises $\mathfrak{H}_1$ (oder $\mathfrak{H}_1'$) mit K_1 haben die Werthe

$$\xi = \frac{h_1 \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{h}_1 a_1}{h_1 + \mathfrak{h}_1} \qquad \eta = \frac{h_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{h}_1 b_1}{h_1 + \mathfrak{h}_1},$$

und es ist identisch

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{h_1 \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{h}_1 K_1}{h_1 + \mathfrak{h}_1}.$$

Aus dieser Identität folgt für

$$x = u_2 \quad y = v_2, \qquad x = u_3 \quad y = v_3$$

$$\mathfrak{K}_2(\xi, \eta) = -r_2^2 + \frac{h_1 \mathfrak{H}_1(u_2, v_2) + \mathfrak{h}_1 K_1(u_2, v_2)}{h_1 + \mathfrak{h}_1}$$

$$= \frac{h_1}{h_1 + \mathfrak{h}_1}\left(\mathfrak{H}_1(u_2, v_2) - r_2^2 + 2 r_2 \mathfrak{h}_1\right)$$

$$\mathfrak{K}_3(\xi, \eta) = -r_3^2 + \frac{h_1 \mathfrak{H}_1(u_3, v_3) + \mathfrak{h}_1 K_1(u_3, v_3)}{h_1 + \mathfrak{h}_1}$$

$$= \frac{h_1}{h_1 + \mathfrak{h}_1}\left(\mathfrak{H}_1(u_3, v_3) - r_3^2 + 2 r_3 \mathfrak{h}_1\right)$$

und demgemäss aus 108)

$$G''' \mathfrak{K}_2(\xi, \eta) - G'' \mathfrak{K}_3(\xi, \eta) = 0.$$

Die zwei Berührungspunkte (ξ, η) sind also die Punkte, in denen der Kreis Q_1 den Kreis K_1 schneidet. Hiermit ist die Steiner'sche Construction vollständig bewiesen.

Definirt man umgekehrt die Hilfskreise 105) (beziehungsweise $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$) durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= \mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 h_1 \\
h_1 K_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - h_2 K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= (h_1 - h_2)\mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2} \\
h_1 K_3(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) - h_3 K_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) &= (h_1 - h_3)\mathfrak{h}_1^2 + 2\mathfrak{h}_1 d_2 \sqrt{h_1}\sqrt{h_3} \\
K_2(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) &= \mathfrak{h}_2^2 + 2\mathfrak{h}_2 h_2 \\
h_2 K_3(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) - h_3 K_2(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) &= (h_2 - h_3)\mathfrak{h}_2^2 + 2\mathfrak{h}_2 d_1 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3} \\
h_2 K_1(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) - h_1 K_2(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) &= (h_2 - h_1)\mathfrak{h}_2^2 + 2\mathfrak{h}_2 d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2} \\
K_3(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) &= \mathfrak{h}_3^2 + 2\mathfrak{h}_3 h_3 \\
h_3 K_1(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) - h_1 K_3(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) &= (h_3 - h_1)\mathfrak{h}_3^2 + 2\mathfrak{h}_3 d_2 \sqrt{h_1}\sqrt{h_3} \\
h_3 K_2(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) - h_2 K_3(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) &= (h_3 - h_2)\mathfrak{h}_3^2 + 2\mathfrak{h}_3 d_1 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3},
\end{aligned} \qquad 113)$$

so gelangt man leicht dazu, die Gleichungen der Kreise Q_1, Q_2, Q_3 durch auf die Kreise K_1, K_2, K_3 unmittelbar Bezug habende Grössen auszudrücken. Da nämlich, unter ξ, η die Coordinaten des Berührungspunktes der Kreise K_1 und $\mathfrak{H}_1$ (oder $\mathfrak{H}_1'$) verstanden, in Folge der Identität

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{h_1 \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{h}_1 K_1}{h_1 + \mathfrak{h}_1}$$

und der Gleichungen 113)

$$K_2(\xi, \eta) = -h_2^2 + \frac{h_1 \mathfrak{H}_1(a_2, b_2) + \mathfrak{h}_1 K_1(a_2, b_2)}{h_1 + \mathfrak{h}_1}$$

$$= \frac{\mathfrak{h}_1 d_3 p_3}{h_1 + \mathfrak{h}_1}$$

$$K_3(\xi, \eta) = -h_3^2 + \frac{h_1 \mathfrak{H}_1(a_3, b_3) + \mathfrak{h}_1 K_1(a_3, b_3)}{h_1 + \mathfrak{h}_1}$$

$$= \frac{\mathfrak{h}_1 d_2 p_2}{h_1 + \mathfrak{h}_1}$$

ist, so stellt die Gleichung

$$d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3 = 0 \qquad 114)$$

einen durch die Berührungspunkte (ξ, η) gehenden Kreis dar, und es wird die Gleichung jedes diese zwei Berührungspunkte enthaltenden Kreises

$$Q_1(x, y) = 0$$

der Identität

$$Q_1(x, y) = \lambda K_1 - \mu (d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3)$$

genügen müssen. Man bestimme nun die Constanten λ, μ derart, dass

$$\begin{aligned}&[Q_1(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) - \mathfrak{h}_2^2(\lambda - \mu d_2 p_2 + \mu d_3 p_3)]\mathfrak{h}_3\\ &+ [Q_1(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) - \mathfrak{h}_3^2(\lambda - \mu d_2 p_2 + \mu d_3 p_3)]\mathfrak{h}_2 = 0\end{aligned}$$

wird. Mit Hilfe der Gleichungen 113) verwandelt sich diese Bedingung in

$$2\left(\frac{d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3} + 2\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}\sqrt{h_3}}{\sqrt{h_2}\sqrt{h_2}}\right)(\lambda\sqrt{h_1} - \mu p_1(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3}))\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3 = 0$$

und wird erfüllt, wenn man

$$\lambda = p_1(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3}) \qquad \mu = \sqrt{h_1},$$

also

$$Q_1(x, y) = p_1(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})K_1 - \sqrt{h_1}(d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3)$$

nimmt. Überdies wird

$$\begin{aligned}Q_1(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) = {}& \mathfrak{h}_2^2[p_1(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3}) - \sqrt{h_1}(d_2 p_2 - d_3 p_3)]\\ &+ 2\mathfrak{h}_2\sqrt{h_1}[d_1 d_2 d_3 + d_1\sqrt{h_1}(d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3}) - (d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})^2]\\ Q_1(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) = {}& \mathfrak{h}_3^2[p_1(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3}) - \sqrt{h_1}(d_2 p_2 - d_3 p_3)]\\ &- 2\mathfrak{h}_3\sqrt{h_1}[d_1 d_2 d_3 + d_1\sqrt{h_1}(d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3}) - (d_2\sqrt{h_2} - d_2\sqrt{h_3})^2].\end{aligned}$$

Diese Gleichungen drücken aus, dass der Kreis (oder die Gerade)

$$Q_1(x, y) = 0$$

die Kreise $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3$, $\mathfrak{H}_3'$ berührt. Es ist nämlich, wenn der Ausdruck

$$p_1(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3}) - (d_2 p_2 - d_3 p_3)\sqrt{h_1}$$

nicht verschwindet,

$$\sqrt{h_1}\left(\frac{d_1 d_2 d_3 + d_1\sqrt{h_1}(d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3}) - (d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})^2}{p_1(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3}) - (d_2 p_2 - d_3 p_3)\sqrt{h_1}}\right)$$

der Halbmesser des Kreises

$$Q_1(x, y) = 0;$$

wenn dagegen jener Ausdruck verschwindet, so ist die Summe der Quadrate der Coëfficienten von x, y in $Q_1(x, y)$

$$= 4h_1[d_1 d_2 d_3 + d_1\sqrt{h_1}(d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3}) - (d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})^2]^2.$$

Gleicherweise stellen die Gleichungen

$$Q_2(x, y) = p_2(d_3\sqrt{h_3} - d_1\sqrt{h_1})K_2 - \sqrt{h_2}(d_3 p_3 K_3 - d_1 p_1 K_1) = 0$$

$$Q_3(x, y) = p_3(d_1\sqrt{h_1} - d_2\sqrt{h_2})K_3 - \sqrt{h_3}(d_1 p_1 K_1 - d_2 p_2 K_2) = 0$$

zwei Kreise (Gerade) dar, welche bezüglich durch die Berührungspunkte des Kreises K_2 mit $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}'_2$ und des Kreises K_3 mit $\mathfrak{H}_3$, $\mathfrak{H}'_3$ laufen und die in den Gruppen

$$\mathfrak{H}_3,\ \mathfrak{H}'_3,\ \mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{H}'_1$$
$$\mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{H}'_1,\ \mathfrak{H}_2,\ \mathfrak{H}'_2$$

enthaltenen Kreise berühren.

Da identisch

$$\frac{Q_2}{\sqrt{h_2}}+\frac{Q_3}{\sqrt{h_3}}=\left(d_2\sqrt{h_2}+d_3\sqrt{h_3}-d_1\sqrt{h_1}\right)\left(\frac{p_2}{\sqrt{h_2}}K_2-\frac{p_3}{\sqrt{h_3}}K_3\right)$$
$$\frac{Q_3}{\sqrt{h_3}}+\frac{Q_1}{\sqrt{h_1}}=\left(d_3\sqrt{h_3}+d_1\sqrt{h_1}-d_2\sqrt{h_2}\right)\left(\frac{p_3}{\sqrt{h_3}}K_3-\frac{p_1}{\sqrt{h_1}}K_1\right)$$
$$\frac{Q_1}{\sqrt{h_1}}+\frac{Q_2}{\sqrt{h_2}}=\left(d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2}-d_3\sqrt{h_3}\right)\left(\frac{p_1}{\sqrt{h_1}}K_1-\frac{p_2}{\sqrt{h_2}}K_2\right)$$

ist, so gehören die Kreise Q_1, Q_2, Q_3 zu derselben Kreisschaar, wie die Kreise

$$\frac{p_2}{\sqrt{h_2}}K_2-\frac{p_3}{\sqrt{h_3}}K_3=0$$
$$\frac{p_3}{\sqrt{h_3}}K_3-\frac{p_1}{\sqrt{h_1}}K_1=0$$
$$\frac{p_1}{\sqrt{h_1}}K_1-\frac{p_2}{\sqrt{h_2}}K_2=0.$$

Ein Kreis

$$\mathfrak{K}_1=(x-u_1)^2+(y-v_1)^2-r_1^2=0,$$

welcher die Kreise K_2, K_3, Q_2 nach Massgabe der Gleichungen

$$K_2(u_1,v_1)=2r_1h_2+r_1^2$$
$$K_3(u_1,v_1)=2r_1h_3+r_1^2$$
$$K_2(u_1,v_1)=r_1^2\left(p_2(d_3\sqrt{h_3}-d_1\sqrt{h_1})-\sqrt{h_2}(d_3p_3-d_1p_1)\right)$$
$$+2r_1\left(d_1d_2d_3+d_2\sqrt{h_2}(d_3\sqrt{h_3}+d_1\sqrt{h_1})-(d_3\sqrt{h_3}-d_1\sqrt{h_1})^2\right)\sqrt{h_2}$$

berührt, unterscheidet sich nicht von dem durch die Gleichungen 71) definirten, weil sich

$$K_1(u_1,v_1)=r_1^2+2r_1\left(\frac{p_2p_3}{p_1}-h_1\right)$$

ergibt, und berührt auch den Kreis Q_3 auf Grund der Gleichung

$$Q_3(u_1,v_1)=r_1^2\left(p_3(d_1\sqrt{h_1}-d_2\sqrt{h_2})-(d_1p_1-d_2p_2)\sqrt{h_3}\right)$$
$$-2r_1\left(d_1d_2d_3+d_3\sqrt{h_3}(d_1\sqrt{h_1}+d_2\sqrt{h_2})-(d_1\sqrt{h_1}-d_2\sqrt{h_2})^2\right)\sqrt{h_3}.$$

9.

Man kann ähnlich, wie bei der einfachen Malfatti'schen Aufgabe, die Construction der Kreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, Q_1, Q_2, Q_3 umgehen.

Es seien M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise K_1, K_2, K_3, M der Punkt gleicher Potenzen derselben oder der Mittelpunkt des Lothkreises K, P_1, P_2, P_3 die drei Potenzkreise

$$h_3 K_2 - h_2 K_3 = 0$$
$$h_1 K_3 - h_3 K_1 = 0$$
$$h_2 K_1 - h_1 K_2 = 0$$

und A_1, A_2, A_3 deren Mittelpunkte, welche je nach den Zeichen der Halbmesser h_1, h_2, h_3 entweder drei äussere oder einen äusseren und zwei innere Ähnlichkeitspunkte der Kreispaare (K_2, K_3), (K_3, K_1), (K_1, K_2) bilden.

Die Kenntniss der Geraden

$$\mathfrak{K}_1 - K = 0,$$

oder (75)

$$\mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{B}_1 y + \mathfrak{C}_1 = 0 \tag{115}$$

führt die Construction des Kreises $\mathfrak{K}_1$ auf die elementare Aufgabe zurück, einen Kreis zu beschreiben, welcher den gegebenen Kreis K_2 (oder K_3) berührt und zu der durch den Lothkreis K und die Gerade (115) bestimmten Kreisschaar gehört. Zur Auflösung dieser Aufgabe genügt es, die Verbindungslinie des Potenzpunktes M mit dem in Bezug auf den Kreis K_2 genommenen Pol der Geraden 115) zu ziehen, welche Verbindungslinie den Kreis K_2 in den Berührungspunkten der zwei möglichen Kreise $\mathfrak{K}_1$ trifft; die Verbindungslinien dieser Punkte mit M_2 schneiden das von M auf die Gerade 115) gefällte Loth in den Mittelpunkten der gesuchten zwei Kreise.

Behufs Construction der Geraden 115) gehe ich von folgenden Gleichungen

$$P_{1\,2} = h_1(h_1 K_3 - h_3 K_1) - d_2 \sqrt{h_1}\sqrt{h_3} K_1 = 0$$
$$P_{1\,3} = h_1(h_1 K_2 - h_2 K_1) - d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2} K_1 = 0$$
$$P_{2\,3} = h_2(h_2 K_1 - h_1 K_2) - d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2} K_2 = 0$$
$$P_{2\,1} = h_2(h_2 K_3 - h_3 K_2) - d_1 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3} K_2 = 0$$
$$P_{3\,1} = h_3(h_3 K_2 - h_2 K_3) - d_1 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3} K_3 = 0$$
$$P_{3\,2} = h_3(h_3 K_1 - h_1 K_3) - d_2 \sqrt{h_3}\sqrt{h_1} K_3 = 0$$
$$P_{1\,1} = h_1(h_3 K_2 - h_2 K_3) - d_1 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3} K_1 = 0$$
$$P'_{1\,1} = h_1(h_3 K_2 - h_2 K_3) + d_1 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3} K_1 = 0$$
$$P_{2\,2} = h_2(h_1 K_3 - h_3 K_1) - d_2 \sqrt{h_3}\sqrt{h_1} K_2 = 0$$
$$P'_{2\,2} = h_2(h_1 K_3 - h_3 K_1) + d_2 \sqrt{h_3}\sqrt{h_1} K_2 = 0$$
$$P_{3\,3} = h_3(h_2 K_1 - h_1 K_2) - d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2} K_3 = 0$$
$$P'_{3\,3} = h_3(h_2 K_1 - h_1 K_2) + d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2} K_3 = 0$$

$$S_1 = -p_1 d_1 \sqrt{h_2}\sqrt{h_3} K_1 + \sqrt{h_1}\sqrt{h_3}\left(d_1 d_2 + \sqrt{h_3}(d_1\sqrt{h_1} + d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})\right) K_2$$
$$+ \sqrt{h_1}\sqrt{h_2}\left(d_1 d_3 + \sqrt{h_2}(d_1\sqrt{h_1} - d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3})\right) K_3 = 0$$
$$S_2 = -p_2 d_2 \sqrt{h_3}\sqrt{h_1} K_2 + \sqrt{h_2}\sqrt{h_1}\left(d_2 d_3 + \sqrt{h_1}(d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3} - d_1\sqrt{h_1})\right) K_3$$
$$+ \sqrt{h_2}\sqrt{h_3}\left(d_2 d_1 + \sqrt{h_3}(d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3} + d_1\sqrt{h_1})\right) K_1 = 0$$
$$S_3 = -p_3 d_3 \sqrt{h_1}\sqrt{h_2} K_3 + \sqrt{h_3}\sqrt{h_2}\left(d_3 d_1 + \sqrt{h_2}(d_3\sqrt{h_3} + d_1\sqrt{h_1} - d_2\sqrt{h_2})\right) K_1$$
$$+ \sqrt{h_3}\sqrt{h_1}\left(d_3 d_2 + \sqrt{h_1}(d_3\sqrt{h_3} - d_1\sqrt{h_1} + d_2\sqrt{h_2})\right) K_2 = 0$$

$$T_1 = \left[d_1 d_2 d_3 + d_1\sqrt{h_1}(d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3}) - (d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})^2 + (d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})p_1\sqrt{h_1}\right] K_1$$
$$- h_1(d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3) = 0$$

$$T'_1 = \left[d_1 d_2 d_3 + d_1\sqrt{h_1}(d_2\sqrt{h_2} + d_3\sqrt{h_3}) - (d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})^2 - (d_2\sqrt{h_2} - d_3\sqrt{h_3})p_1\sqrt{h_1}\right] K_1$$
$$+ h_1(d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3) = 0$$

$$T_2 = \left[d_1 d_2 d_3 + d_2 \sqrt{h_2}(d_3 \sqrt{h_3} + d_1 \sqrt{h_1}) - (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1})^2 + (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1}) p_2 \sqrt{h_2}\right] K_2$$
$$- h_2(d_3 p_3 K_3 - d_1 p_1 K_1) = 0$$

$$T'_2 = \left[d_1 d_2 d_3 + d_2 \sqrt{h_2}(d_3 \sqrt{h_3} + d_1 \sqrt{h_1}) - (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1})^2 - (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1}) p_2 \sqrt{h_2}\right] K_2$$
$$+ h_2(d_3 p_3 K_3 - d_1 p_1 K_1) = 0$$

$$T_3 = \left[d_1 d_2 d_3 + d_3 \sqrt{h_3}(d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2}) - (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2})^2 + (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2}) p_3 \sqrt{h_3}\right] K_3$$
$$- h_3(d_1 p_1 K_1 - d_2 p_2 K_2) = 0$$

$$T'_3 = \left[d_1 d_2 d_3 + d_3 \sqrt{h_3}(d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2}) - (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2})^2 - (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2}) p_3 \sqrt{h_3}\right] K_3$$
$$+ h_3(d_1 d_1 K_1 - d_2 p_2 K_2) = 0$$

aus, deren geometrische Bedeutung leicht anzugeben ist.

1) Die ersten sechs Gleichungen stellen bezüglich Potenzkreise der Kreispaare

$$(K_1, P_2) \ (K_1, P_3) \ (K_2, P_3) \ (K_2, P_1) \ (K_3, P_1) \ (K_3, P_2)$$

dar; die Mittelpunkte derselben, welche entsprechend mit

$$A_{12}, \ A_{13}, \ A_{23}, \ A_{21}, \ A_{31}, \ A_{32},$$

bezeichnet werden sollen, sind als Ähnlichkeitspunkte leicht zu construiren. Man ziehe überdies die Verbindungslinien G_1, G_2, G_3 der Punkte A_{12} und A_{13}, A_{23} und A_{21}, A_{31} und A_{32}. Nach der bekannten Construction der Apollonius'schen Aufgabe (Gergonne) erhält man die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Kreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}'_1$ mit dem Kreise K_1, wenn man den in Bezug auf den Kreis K_1 genommenen Pol der Geraden G_1 mit dem Potenzpunkte M verbindet; diese Gerade ist 114) die Potenzlinie der Kreise

$$K_1 = 0 \qquad d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3 = 0;$$

eine durch M_1 senkrecht zu derselben gezogene Gerade werde mit L_1 bezeichnet. L_1 kann auch unmittelbar construirt werden, wenn der Lothkreis K bekannt ist, weil der Durchschnittspunkt der Geraden G_1 mit der Potenzlinie der Kreise K_1, K auf L_1 liegen muss. Es seien noch L_2, L_3 zwei Gerade, welche eine entsprechende Bedeutung für die Kreise K_2, K_3 haben.

2) Die Gleichungen

$$P_{11} = 0 \qquad P'_{11} = 0$$

stellen die Potenzkreise des Kreispaares (K_1, P_1) dar. Der Mittelpunkt A_{11} des ersteren ist der Durchschnittspunkt der Geraden, welche M_1 mit A_1, A_{31} mit A_2 verbinden, der Mittelpunkt A'_{11} des zweiten ist der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien der Punkte M_1 und A_1, A_{21} und A_3. Ähnlich werden die Mittelpunkte A_{22}, A'_{22}, A_{33}, A'_{33} der Kreise P_{22}, P'_{22}, P_{33}, P'_{33} construirt.

3) Die Gleichung

$$S_1 = 0$$

drückt einen Kreis aus, welcher den Kreisschaaren (P_{23}, P_{21}), (P_{31}, P_{32}) gemeinsam ist, d. h. durch die (reellen oder imaginären) Durchschnittspunkte sowohl der Kreise P_{23}, P_{21} als auch der Kreise P_{31}, P_{32} geht. Der Mittelpunkt desselben ist daher der Durchschnittspunkt der Geraden G_2, G_3.

4) Der Kreis

$$T_1 = 0$$

geht durch die Durchschnittspunkte sowohl der Kreise

$$K_1 = 0 \qquad d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3 = 0$$

als auch der Kreise

$$P_1 = 0 \qquad S_1 = 0,$$

der Kreis

$$T'_1 = 0$$

durch die Durchschnittspunkte sowohl der Kreise

$$K_1 = 0, \qquad d_2 p_2 K_2 - d_3 p_3 K_3 = 0$$

als auch der Kreise

$$P'_{11} = 0 \qquad S_1 = 0;$$

die Mittelpunkte dieser Kreise sind daher die Punkte, in welchen die Verbindungslinien des Durchschnittspunktes der Geraden G_2, G_3 mit A_{11}, A'_{11} von der Geraden L_1 geschnitten werden. Beiläufig sei noch bemerkt, dass diese Kreise zugleich die Potenzkreise des Kreispaares K_1, Q_1 sind. Die Mittelpunkte der Kreise T_2, T'_2, T_3, T'_3 sind in entsprechender Weise zu construiren.

Dies vorausgeschickt, ist die Gerade 115) diejenige, auf welcher die Mittelpunkte der Kreise T'_2, T_3, P_1 liegen. Denn diese Kreise werden sowohl von dem Lothkreise K als auch von dem Kreise $\mathfrak{K}_1$ auf Grund der Gleichungen

$$T'_2(u_1, v_1) = r_1^2 \left[d_1 d_2 d_3 + d_2 \sqrt{h_2}(d_3 \sqrt{h_3} + d_1 \sqrt{h_1}) - (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1})^2 - (d_3 \sqrt{h_3} - d_1 \sqrt{h_1}) p_2 \sqrt{h_2} + h_2 (d_3 p_3 - d_1 p_1)\right]$$

$$T_3(u_1, v_1) = r_1^2 \left[d_1 d_2 d_3 + d_3 \sqrt{h_3}(d_1 \sqrt{h_1} + d_2 \sqrt{h_2}) - (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2})^2 + (d_1 \sqrt{h_1} - d_2 \sqrt{h_2}) p_3 \sqrt{h_3} - h_3 (d_1 p_1 - d_2 p_2)\right]$$

$$h_3 K_2(u_1, v_1) - h_2 K_3(u_1, v_1) = (h_3 - h_2) r_1^2$$

senkrecht geschnitten.

Für drei Kreise von gleichen Halbmessern gestaltet sich diese Construction besonders einfach.